

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Mislav Cvitković

Diplomski rad

**Djelovanje prirodnih svemirskih i
zemaljskih oscilatora na dugoročne
fluktuacije temperature na Zemlji**

U Zagrebu 2011.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: MAGISTAR FIZIKE

Mislav Cvitković

Diplomski rad

**Djelovanje prirodnih svemirskih i
zemaljskih oscilatora na dugoročne
fluktuacije temperature na Zemlji**

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Vladimir Paar

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. prof. dr. sc. Vladimir Paar _____

2. prof. dr. sc. Slobodan Brant _____

3. prof. dr. sc. Damir Veža _____

Datum: 2. lipnja 2011.

Ad maiorem Dei gloriam.

Zahvale

Zahvaljujem Svemogućem Bogu na svim darovima.

Zahvaljujem roditeljima i obitelji na svesrdnoj podršci tijekom cijelog obrazovanja i studija.

Anda je bila svjedokom gotovo cijelog studija – i kad je išlo po loju i kad je išlo po trnju. Hvala joj na potpori, strpljenju, savjetima – na svemu.

Posebno sam zahvalan profesoru Vladimiru Paaru: za povjerenje, za zalaganje, za skromnost i susretljivost. Za sve što me je naučio i za sve što mi je pomogao na bilo koji način.

Veliku zahvalnost zaslužuje i dr. sc. Matko Glunčić: za sve sate zajedničkog rada, za sve sate rasprava, za sve prijedloge i za strpljivost.

Hvala svim studijskim kolegama za sve rasprave u predvorju Fizičkog odsjeka, u tramvaju ili bilo gdje. Često su osvijetlile razumijevanje. Hvala profesoru fra Nedjeljku Jukiću na podršci i raspravama.

Hvala svakome tko me je nešto dobro naučio.

Sadržaj

Zahvale	IV
Uvod	1
1 Pregled značajki atmosfere i pokusa	5
1.1 Zemlja i atmosfera	5
1.2 Eksperimentalni podatci za Zemljinu temperaturu i koncentraciju CO ₂ u prošlosti	8
2 Atmosfera kao klasični idealni plin	14
2.1 Fizički opis atmosferskih promjena	14
2.2 Arrheniusova teorija	15
2.2.1 Temeljne pretpostavke teorije	15
2.2.2 Promjena temperature zbog promjene propusnosti . . .	16
2.2.3 Stvarni podatci i procjena	18
2.2.4 Kritika Arrheniusova modela	20
2.3 Adijabatska teorija	21
2.3.1 Pretpostavke teorije	21
2.3.2 Promjena tlaka u troposferi	23
2.3.3 Upijanje Sunčeva zračenja	25
2.3.4 Geometrijski čimbenik	27
2.3.4.1 Slučaj $\psi = 0$	27
2.3.4.2 Slučaj $\psi = \frac{\pi}{2}$	27
2.3.4.3 Slučaj $\psi = 23,44^\circ$	28

2.3.5	Konvekcija kao adijabatski proces	30
2.3.5.1	Izračun α	31
2.3.5.2	Temperatura u troposferi	32
2.3.6	Prijenos topline kondenzacijom/isparavanjem	33
2.3.7	Relativni udjeli mehanizama	34
2.3.8	Utjecaj porasta koncentracije CO_2	36
2.3.9	Uzročno–posljedična veza $c(\text{CO}_2)$ i T	38
2.3.10	Kritika adijabatskog modela	39
3	Računalna raščlamba Fourierova transformata i značajniji vrhovi	43
3.1	Diskretni Fourierov transformat	43
3.2	Interpolacija	45
3.3	FFT EPICA podataka	46
3.4	Izbor značajnijih vrhova u FFT–u	48
3.4.1	DEFEM	51
3.4.2	DEFMAFeM	52
3.4.3	DEDuFeM	54
3.4.4	Cjelokupna integracija programa — DatEx	54
3.5	Crna kutija i važni vrhovi	58
4	Mehanizmi pojedinih perioda izmjena temperature i koncentracije CO_2	62
4.1	Milankovićeva teorija	62
4.1.1	Ozračivanje Zemlje i astronomski parametri	62
4.1.2	Milankovićevi ciklusi	67
4.2	Period od $\sim 100\,000$ godina	72
4.2.1	Milankovićevo rješenje i “100 ky – problem”	72
4.2.2	Promjena ψ kao rješenje	73
4.2.3	Promjena orbitnog nagiba kao rješenje	74
4.2.4	Drugi mehanizmi	75
4.3	Točka na $\sim 81\,000$ godina	75

4.4	Period od $\sim 72\,000$ godina	76
4.5	Period od $40\,000$ godina	77
4.6	Period od $28\,000$ godina	77
4.7	Period od $\sim 26\,000$ godina	78
4.7.1	Pokušaj procjene prema Sorokhtinu	79
4.7.2	Izračun Zemljina precesijskog perioda	81
4.7.2.1	Gravitacijski potencijal	82
4.7.2.2	Precesija u izobličenom potencijalu	87
4.7.3	Komentar	90
4.8	Period od $23\,000$ godina	91
4.9	Period od $21\,000$ godina	91
4.10	Period od $19\,000$ godina	92
4.11	Period od $11\,000$ godina	92
4.12	Periodi od $\sim 5\,000$ godina	93
4.13	Drugi periodi	93
4.14	Zaključna usporedba	94
Zaključak		98
A Jedinice		101
A.1	Vrijeme	101
A.2	Koncentracija	101
B Interpolacije		103
B.1	Linearna interpolacija	103
B.2	Krivuljna interpolacija	104
B.3	Hermiteova krivuljna interpolacija	106
C Središte mase Zemljina ispupčenja		108
Literatura		111

Uvod

Jedan od procesa koji najviše izravno utječe na ljudski život je proces izmjene klime na Zemlji. Ovaj se proces događa na cijelom skupu vremenskih i prostornih ljestvica¹. Izravno opažamo promjenu klime na lokalnoj prostornoj ljestvici te dnevnoj i godišnjoj vremenskoj ljestvici. S druge se strane proces odvija i na izrazito duljim vremenskim ljestvicama (stoljeća, tisućljeća, desetci tisuća, milijuni godina) i na širim prostornim ljestvicama (cijela Zemljina atmosfera, Sunčev sustav).

Međutim, u prvom slučaju možemo zabilježiti podatke i izravno mjeriti klimu, pa na toj ljestvici i sustavno pratiti klimatske promjene, a time i razvijati klimatske modele, dok u drugom slučaju naravno ne možemo izravno mjeriti podatke, a tek smo posljednjih godina razvili metode posrednog mjerenja temperatura i koncentracija ugljičnog dioksida u atmosferi kroz prošlost, izvlačeći ih iz geoloških slojeva Zemlje pogodnih za takve analize. To nam je otvorilo uvid u procese izmjene klime kroz zadnjih gotovo milijun godina. Našli smo mogućnost da pratimo klimatske promjene na izrazito dugoj vremenskoj ljestvici na kojoj u igru dolazi i niz drugih parametara i međudjelovanja, pogotovo astronomskih i zemaljskih djelovanja koja utječu na klimu na takvim ljestvicama.

Trenutni klimatološki modeli, primijetimo, takva djelovanja ne uključuju jer ih i ne moraju uključivati budući da su beznačajna na svakodnevnoj ili na godišnjoj ljestvici. Prema tome nisu dostatni za opis promjene klime na

¹Eng. *scale*, mjerilo niza vrijednosti u nekom rasponu. Predlažemo izraz *ljestvica* za taj pojam i ovdje ćemo ga koristiti.

ljestvicama milijuna godina ili čak starosti Zemlje.

S druge strane, očigledno je da će učinci koji dovode do svakodnevne i lokalne klimatske promjene biti jednostavno presitni da bi utjecali na promjene tijekom tisuća godina. Zapravo, možemo ih smatrati više–manje nasumičnim fluktuacijama (koje, jer su nasumične, nemaju “memoriju”) na kratkoj ljestvici unutar općeg procesa koji ima određenu pravilnost na dugoj ljestvici. Dakle, na ljestvici koja nas u ovom radu zanima, glavnu ulogu igraju utjecaji bilo unutar same Zemlje bilo iz svemira koje možemo modelirati čisto fizičkom teorijom. Najkraće i banalno rečeno, možemo zamisliti promjenu klime na dugoj ljestvici kao razvoj nelinearnog sustava mnogo vezanih oscilatora koji predstavljaju razne utjecaje. Ovakva je slika opravdana i činjenicom da gotovo svi utjecaji na Zemlji i u svemiru imaju periodična obilježja, prije svega zbog periodičnosti Zemljina gibanja u odnosu na svemir.

Jedan je od središnjih problema današnje znanosti o klimi tzv. *staklenički učinak* (eng. *greenhouse effect*). Iz prirode samog modela kojeg ćemo domisliti i vremenske ljestvice koju ćemo promatrati jasno je da naše razmatranje neće dati konačan odgovor na pitanje stakleničkog učinka u smislu u kojem se taj pojam danas koristi. Cilj naše raščlambe je nešto reći o općim težnjama klime (kroz oko 800 000 godina) unutar kojih postoje razne uzročno–posljedične izmjene temperature i ugljičnog dioksida čije se značajke također mijenjaju.

Kako se već nazire, jedan od središnjih problema ovog rada je veza promjena koncentracije ugljičnog dioksida i promjena temperature u atmosferi. Stoga ćemo se tijekom rada osvrnuti, bilo izričito bilo prešutno, na sam ciklus ugljičnog dioksida na Zemlji, koji je jedan od glavnih oscilatora u našoj slici sustava vezanih oscilatora [3, 4].

Osim činjenice povezanosti temperature i koncentracije CO_2 , jedan od središnjih problema oko kojih se trenutno u znanosti vode velike rasprave jest pitanje smjera uzročno–posljedične veze, tj. što je uzrok a što posljedica: uzrokuje li promjena temperature promjenu koncentracije CO_2 ili obratno?

Bez obzira što se u medijima i u svakodnevnoj, pa i školskoj slici promjene koncentracije CO₂ smatraju uzrokom promjena temperature, u znanosti ne postoji konsenzus o tom pitanju.

Kroz nekoliko posljednjih godina suprotan je stav posebno utvrđen na temeljnim termodinamičkim zakonima u tzv. *adijabatskoj teoriji stakleničkog učinka*, čiji autori uvjerljivo ističu da je dosadašnji model statičan (što jest; to je u principu Arrheniusov statični model) i da ne uključuje dovoljno konvekciju topline u atmosferi, a ona ima *krajnji* učinak smanjenja temperature porastom koncentracije CO₂ [14, 15, 62, 63].

Glavni je cilj ovoga rada ipak nešto “tvrđi”. Naime, već niz godina na Antarktici djeluje istraživačka skupina (odnosno projekt EPICA²) koja iz dubokih slojeva leda starih do milijun godina očitava promjene koncentracije CO₂, temperature, koncentracije kisikovih izotopa, metana i posebne vrste prašine [28, 53]. Svi ti parametri govore nešto o prošlosti Zemlje. Zapravo su to najvrjedniji i u konačnici jedini takvi podatci, a do sad nisu do kraja proučeni. Točnije, u svim dosadašnjim analizama isticane su samo glavne značajke tog skupa podataka jer bi se niz podataka u načelu uvijek “izgladio” bilo u izravnom prostoru, bilo u Fourierovu transformatu.

Na početku rada dat ćemo kratak pregled osnovnih značajki atmosfere, nabrojiti ćemo i izvesti neke njezine stalnice³ koje ćemo kroz rad koristiti i predstaviti ćemo podatke Zemljine klimatske prošlosti.

Prije nego pristupimo raščlambi, želimo stvoriti sliku o odnosu promjena koncentracije ugljičnog dioksida i temperature kao dvaju međudjelujućih mehanizama. Teorija koja bi dala model za opis takve veze uzima atmosferu kao klasični plinski sustav s više slojeva i iz fizičkih značajki toga sustava pokušava izvesti određene zaključke. Takvu smo teoriju predstavili u drugom poglavlju: najprije statičnu Arrheniusovu [5, 6], a onda i adijabatsku teoriju kao njenu nadogradnju [13, 14, 15, 31, 32, 59, 60, 62, 63].

²Eng. *European Project for Ice Coring in Antarctica*, Europski projekt za uzorkovanje slojeva leda na Antarktici.

³Eng. *constant*, stalna, nepromjenjiva veličina. Predlažemo izraz *stalnica* za taj pojam i ovdje ćemo ga koristiti.

Budući da želimo prepoznati glavne periodičnosti u zemaljskoj klimatskoj povijesti (toliko daleko koliko imamo podatke) i njihove uzroke koji će nam onda dati odgovore na niz prethodno postavljenih pitanja, napraviti ćemo potpun Fourierov transformat podataka. Potom ćemo u sklopu ovog diplomskog rada umjesto uobičajenog “glačanja” razviti algoritam koji će iz našeg Fourierova transformata izdvojiti značajnije vrhove, koje bismo glačanjem izgubili. Pri tom za analizu koristimo programski paket MATLAB® [40], dok ćemo sve grafove crtati u programskom paketu Mathematica® [39].

Konačno, za barem neke od vrhova želimo odrediti koji ih zemaljski ili svemirski oscilatori u slici dinamičkog sustava vezanih oscilatora uzrokuju. Stoga ćemo u svjetlu Milankovićeve teorije klimatskih promjena, a koristeći FFT službenih podataka projekta EPICA [28] opisati mehanizme odgovorne za sve bitnije vrhove, konkretno za sve iznad 20 ky, a i za neke ispod. Pri tom ćemo posebno izvesti izraz za precesijski period Zemlje, jer je on gotovo jedini period koji je samostalan tj. daje vrh kojem jednoznačno možemo pridružiti određeni mehanizam, a i jer do njega možemo doći izravno, bez Milankovićeve razvoja i potonje prilagodbe podataka. Dodatan je razlog što se taj period zbraja s dosta drugih dajući doprinose i drugim velikim vrhovima u FFT-u.

Tek kad budemo imali ovu potpuniju sliku koja sadrži gotovo cjelokupni sklop utjecaja sa Zemlje i iz svemira, imat ćemo bolju zamisao i o samoj klimi na Zemlji na ljestvici od milijun godina, ali i sliku o određenim fundamentalnim ograničenjima neovisnim o ljestvici koju razmatramo. Uostalom, to je i jedno vrhunsko političko pitanje [23], što također treba imati na umu kad govorimo o odnosima zastupljenosti pojedine teorije u današnjoj znanosti.

Naposljetku, cilj rada ipak nije dati odgovor na takvo političko pitanje nego dati čisto fizičku sliku i model te temeljna fizička ograničenja u bilo kojem drugom modelu. Do tog ćemo cilja doći i termodinamičkom i statističko-fizičkom raščlambom našeg modela, kao i analizom izmjerenih podataka te dosadašnjih saznanja u ovom galopirajućem interdisciplinarnom znanstvenom području.

1. POGLAVLJE

Pregled značajki atmosfere i pokusa

Prije nego krenemo u raščlambu našeg određenog problema, trebamo ga smjestiti u općenitiji okvir kako bismo dobili opću sliku o cijeloj stvari. Ovdje ćemo dati kratak pregled značajki atmosfere i iznijeti nekoliko značajnijih mjerenja koja ukazuju na promjene u atmosferi tijekom vremena. Neka su nam od njih glavna za analizu kroz cijeli rad (npr. mjerenja EPICA projekta), druga će nam poslužiti za usporedbu, a neka će nam dati uvid i stvoriti određenu sliku o problematici.

1.1 Zemlja i atmosfera

Premda postoji niz znanosti koje proučavaju pojedine poglede na Zemlju i te su znanosti poprilično neovisne, Zemlju trebamo zamišljati kao jedinstven i složen fizički sustav, sastavljen od mreže dinamičkih sustava koji međudjeluju za svemirom i međusobno.

Najčešća i zorna podjela tih sustava je po prostornom rasporedu, tj. na kugline ljuske određenih značajki. Prva je podjela na *vanjske* ljuske (eng. *external shells*), u koje spadaju Zemljina *kora* (eng. *crust*), *hidrosfera* i *atmosfera* (opet ih zamišljamo kao ljuske) i *unutarnje* ljuske (eng. *internal shells*), u koje spadaju *plašt* (eng. *mantle*), *astenosfera* i *jezgra* (eng. *core*).

Općenito ih zovemo *geosferama*. U ovom radu nas zanimaju vanjske ljuske, i to prvenstveno atmosfera, iako ćemo vidjeti da postoji povratna veza utjecaja između atmosfere i hidrosfere.

U termodinamičkim proračunima procesa u atmosferi bit će nam važan sam sastav atmosfere. Zemljina atmosfera je u prvom redu dušična, nešto manje kisična i neznatno otpada na ostale plinove. Plinski je sastav atmosfere koji će nadalje biti korišten donesen u tablici 1.1. Odavde želimo odrediti

Tablica 1.1: Sastav atmosfere po plinovima. Oznake: V_i/V volumni udio, p_i parcijalni tlak, M_i molna masa, $c_{p,i}$ svojstveni toplinski kapacitet pri stalnom tlaku. Preuzeto iz [25], [63] i [67].

Plin	V_i/V [%]	p_i [p_0]	M_i [g/mol]	$c_{p,i}$ [J/kg K]
N ₂	78,084	0,7551	28,013	1 041,6
O ₂	20,946	0,2315	31,998	917
Ar	0,934	0,0128	39,948	519,16
CO ₂	0,0335	0,00046	44,009	833
Ne	0,001818	0,0000125	20,180	1 030,1
Ostali	0,0007	0,000007		

ove značajke za atmosferu kao cjelinu. Naravno, ukupni tlak je atmosferski tlak, $p_0 = 101,325 \text{ kPa} = 1 \text{ atm}$. Svojstveni toplinski kapacitet pri stalnom tlaku za cijelu atmosferu možemo naći usrednjavajući toplinske kapacitete za sastojnice iz tablice 1.1, koje čine praktički cijelu atmosferu (preko 99,999%), ali dajući im težine koje im prema pripadnom parcijalnom tlaku i pripadaju:

$$c_p = \frac{1}{p_0} \sum_{i=\text{N}_2}^{\text{Ne}} p_i c_{p,i} = 1005,839 \text{ J/kg K.} \quad (1.1)$$

Ovdje je u sumacijskom znaku simbolično označeno da se zbraja po redovima u tablici 1.1 tj. po danih 5 glavnih sastojnica atmosfere (N₂, O₂, Ar, CO₂, Ne).

Molna je masa definirana kao masa po molu tvari, odnosno

$$M = \frac{m}{n} = \sum_{i=N_2}^{Ne} \frac{n_i}{n} M_i. \quad (1.2)$$

Međutim, za idealni plin je

$$\frac{n_i}{n} = \frac{\frac{pV_i}{RT}}{\frac{pV}{RT}} = \frac{V_i}{V}, \quad (1.3)$$

tj. molni udjeli odgovaraju volumnim udjelima, pa imamo

$$M = \sum_{i=N_2}^{Ne} \frac{V_i}{V} M_i = 28,9642 \text{ g/mol}. \quad (1.4)$$

Sve su ove značajke atmosfere na površini Zemlje tj. na visini 0 i pri atmosferskom tlaku p_0 . Međutim, Zemljina atmosfera se sastoji od 5 fizički različitih slojeva:

1. *troposfera* (0 do 9-17 km): najgušći sloj koji se grije prvenstveno toplinskim zračenjem Zemlje pa temperatura pada s visinom; zbog gustoće su plinovi dobro izmiješani i moguća je konvekcija;
2. *stratosfera* (9-17 do 51 km): sloj koji se grije prvenstveno upijanjem Sunčeva zračenja pa temperatura u njemu raste s visinom; nema konvekcije jer je zrak prerijedak za nju;
3. *mezosfera* (51 do 80-85 km): rijetki sloj u kojem temperatura opet opada s visinom i doseže najniže vrijednosti na Zemlji;
4. *termosfera* (80-85 do ~700 km): izrazito rijedak zrak u kojem temperatura raste s visinom; zbog male gustoće, temperatura nije dobro ni definirana;
5. *egzosfera* (700 km do 10 000 km): područje u kojem uopće nema sudara čestica, pa nije više fluid; uglavnom se sastoji od vodika i helija.

Između njih se nalaze prijelazni slojevi, redom: *tropopauza*, *stratopauza*, *mezopauza* i *egzobaza*. Porastom visine odnosno prelaskom iz sloja u sloj mijenjaju se sastav i odnosi iz tablice 1.1, pogotovo tlak i temperatura. Nas će zanimati ti odnosi u sloju atmosfere najbližem Zemlji odnosno u troposferi budući da ona izravno utječe na Zemljinu površinu i u njoj se događaju najsloženiji procesi. Kako je najdonji, taj je sloj i najgušći.

Zemlja se nalazi u Sunčevu sustavu u kojem je najistaknutije međudjelovanje sa Suncem (gravitacija i zračenje) i Mjesecom (gravitacija) koje ima najznačajniji učinak na niz procesa na Zemlji, pa tako i na temperaturu odnosno temperaturu atmosfere, što je naš predmet. Osim činjenice same vrtnje Zemlje oko osi i oko Sunca, vidjet ćemo da značajan učinak ima i nagnutost Zemljine osi prema Sunčevoj ekvatorskoj ravnini, koju zovemo *ekliptička ravnina*.

Trenutni je kut Zemljine osi prema ekliptičkoj ravnini (*precesijski kut*) $\psi = 23.44^\circ = 23^\circ 26' 24''$ i mijenja se u tijeku Zemljine povijesti. Između ostalog na taj kut utječe i još jedna bitna Zemljina značajka, a to je da nije savršena kugla nego elipsoid s poluosima $R_e = 6\,378,14$ km (ekvatorska) i $R_p = 6\,356,75$ km (polna) odnosno ekscentricitetom¹ $\varepsilon = 0,003\,353\,64$ [17]. Da ne nabrajamo dalje, sve stalnice korištene u radu donesene su u tablici 1.2.

1.2 Eksperimentalni podatci za Zemljinu temperaturu i koncentraciju CO₂ u prošlosti

Proučavanje Zemljine prošlosti, pogotovo klimatske, vrlo je staro. Međutim, do vremena moderne znanosti to je proučavanje bilo na ljestvici postanka civilizacije, dakle na ljestvici nekoliko tisuća godina, jer se temeljilo na bilježenju opažanih vremenskih promjena. Tek u današnjem vremenu razvijene su i

¹Zapravo, Zemljin oblik nije elipsoidan nego općenito geoidan, pa se ovaj koeficijent zove spljoštenost (eng. *flattening* ili *oblateness*). Ovdje ćemo Zemlju približiti elipsoidom dviju jednakih poluosi.

Tablica 1.2: Astronomske i fizičke stalnice korištene u radu. Preuzeto iz [17, 68].

Veličina	Oznaka	Iznos	Jedinica
Precesijski kut	ψ	23,44	°
Ekvatorski polumjer Zemlje	R_e	6 378,136	km
Polni polumjer Zemlje	R_p	6 356,746	km
Srednji polumjer Zemlje	R_\oplus	6 371	km
Ekscentricitet Zemlje	ε	0,003 354	
Dinamički ekscentricitet Zemlje	$\frac{J-I}{J}$	0,003 274	
Masa Zemlje	M_\oplus	$5,974 \cdot 10^{24}$	kg
Masa Sunca	M_\odot	$1,989 \cdot 10^{30}$	kg
Masa Mjeseca	M_L	$7,348 \cdot 10^{22}$	kg
Precesijski kut Mjesečeve orbite	λ	5.15	°
Polumjer Zemljine orbite	d_\odot	$1,496 \cdot 10^{11}$	m
Polumjer Mjesečeve orbite	d_L	$3,844 \cdot 10^8$	m
Jakost Sunčeva zračenja	I_\odot	1 367,213	$\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$
Atmosferski tlak	p_0	101 325	Pa
Temperatura Zemljine površine	T_p	288,2	K
Stefan–Boltzmannova stalnica	σ	$5,670 \cdot 10^{-8}$	$\text{J K}^{-4} \text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$
Opća gravitacijska stalnica	G	$6,673 \cdot 10^{-11}$	$\text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$
Opća plinska stalnica	R	8,314	$\text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$

još se uvijek razvijaju eksperimentalne tehnike mjerenja podataka Zemljine prošlosti unatrag stotina tisuća, pa čak i milijuna godina. To je sasvim druga ljestvica i predmet ovog rada su klimatske promjene upravo na takvoj ljestvici.

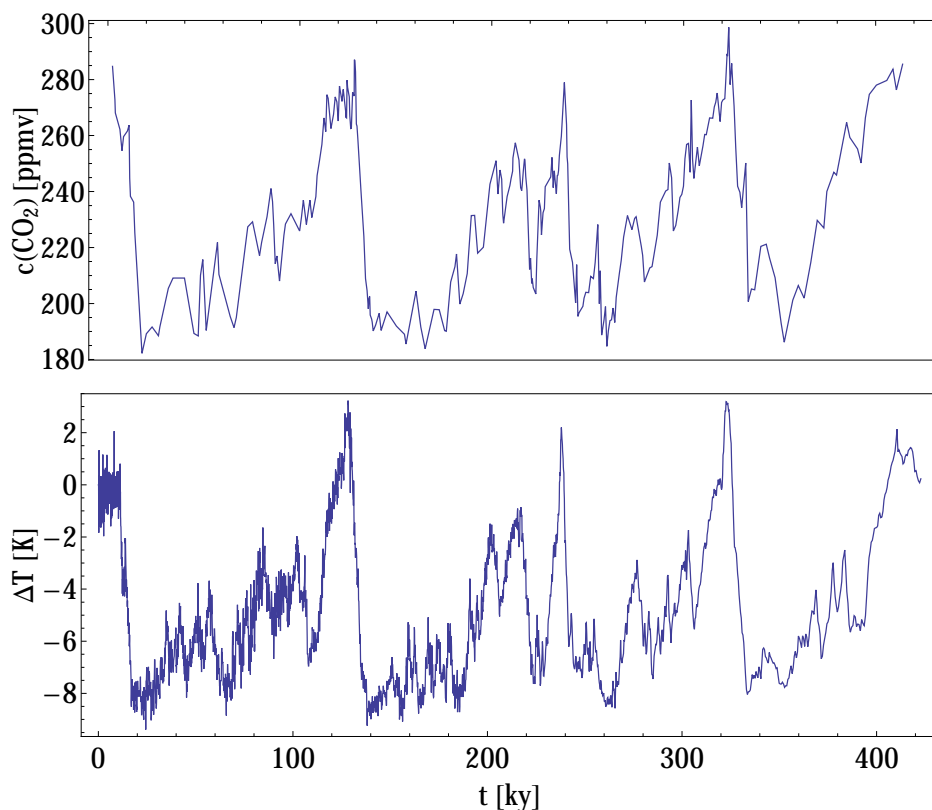
Sve su eksperimentalne metode određivanja temperature u prošlosti Zemlje posredne — to im je glavna mana. Naime, ne postoji izravan zapis temperature u Zemljinoj prošlosti, nego se promjene temperature očitavaju u promjenama određenih elemenata na Zemlji za koje se dobro zna kako ovise o temperaturi na Zemlji, bilo površinskoj bilo atmosferskoj.

Najčešća takva metoda je mjerenje koncentracija pojedinih izotopa, a najčešći od izotopa koji se koristi za izlučivanje podataka za temperaturu je ^{18}O . Naime, različita je koncentracija tog izotopa u arktičkom i antarktičkom ledu i u oceanu. Otapanjem leda dolazi do promjene koncentracije ^{18}O u oceanu, a otapanje leda znači povišenje temperature. S druge strane, trenutne koncentracije ostaju zabilježene u slojevima leda na polovima koji se stvaraju u svakom trenutku. Tako proučavanjem današnjih koncentracija kisikova izotopa u ovisnosti o dubini polnog leda možemo, znajući kojem vremenu prošlosti odgovara pojedina dubina i znajući vezu koncentracije i temperature, dobiti temperaturu u prošlosti Zemlje.

Postoji nekoliko eksperimenata, točnije znanstvenih udruženja koja mjere podatke za koncentracije ^{18}O , CO_2 i niza drugih plinova i/ili izotopa elemenata. Ipak, dvije su eksperimentalne grupe najdalje otišle i što se tiče dubine podataka (koliko u prošlost sežu) i što se tiče razlučivosti odnosno gustoće podataka. To su ruska postaja Vostok i EPICA projekt s nekoliko postaja, sve na Antarktici.

Podatci s postaje Vostok objavljeni su u [53]. Prikazani su na sl. 1.1 Sežu do ~ 423 ky u prošlost za temperaturu i ~ 414 ky za ugljični dioksid. Također, podatci za temperaturu su puno gušći nego za koncentraciju ugljičnog dioksida: imamo 3 311 točaka za temperaturu, a 283 točke za koncentraciju CO_2 u otprilike jednakom vremenskom rasponu. Druga je značajka podataka da su gušći što su bliže sadašnjosti, što možemo i očekivati budući da je teže točno odrediti koncentracije u starijim slojevima nego u mlađim. Jedna je od najbitnijih značajki ovih podataka, kako ćemo vidjeti, gotovo jednaka temperatura minimuma, koja će nam predstavljati graničnu temperaturu za oporavak iz ledenog doba. Ta se minimalna temperatura kreće u rasponu od 1 K za sve minimume. Raspon (amplituda) podataka za temperaturu je oko 12 K dok je raspon koncentracija CO_2 oko 120 ppmv.

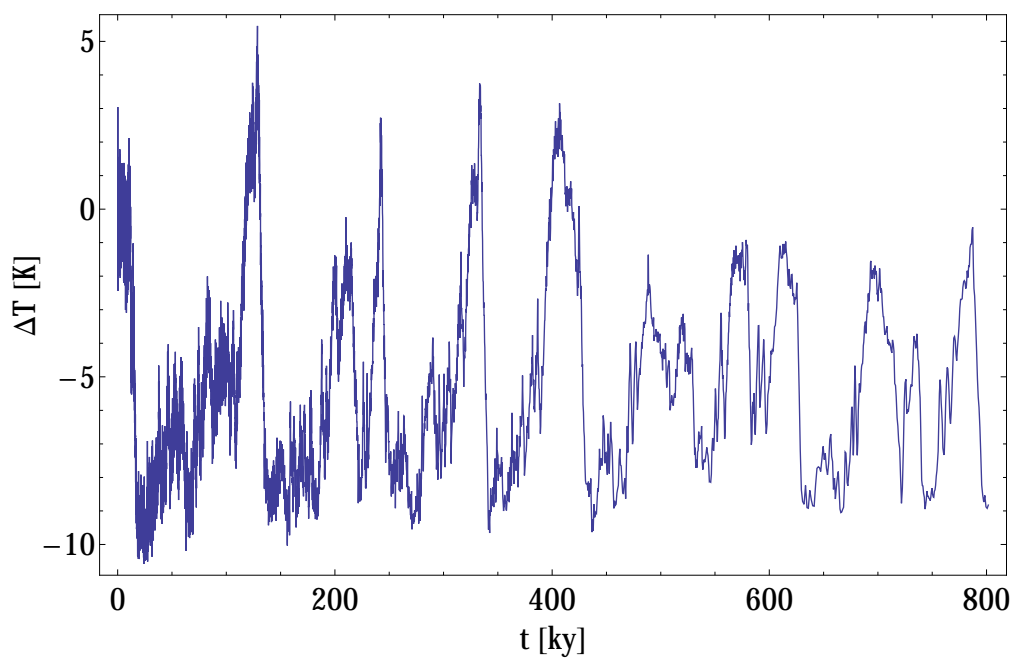
Druga je skupina podataka na koju ćemo se uglavnom pozivati u ovom radu ona projekta EPICA, ovdje konkretno s postaje EPICA Dome C na Antarktici. Ti su podatci objavljeni u [28]. Prikazani su na slici 1.2. Sa slike



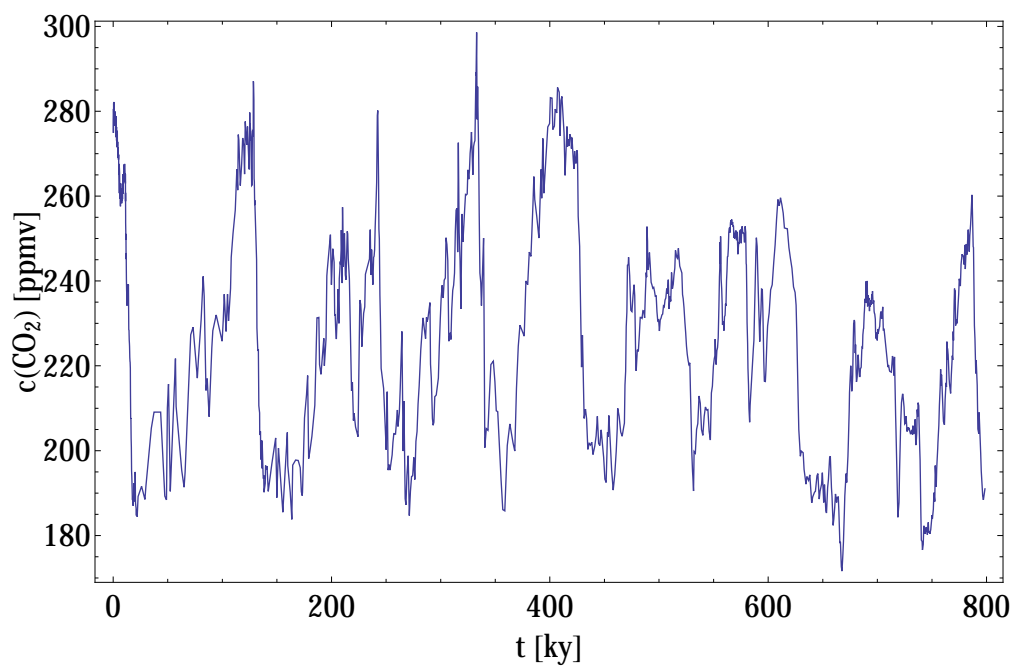
Slika 1.1: Eksperimentalni podatci postaje Vostok za koncentraciju CO_2 (gore) i za temperaturu (dolje) [53]. Za jedinice v. A Dodatak.

je jasno vidljivo da imaju slične značajke kao i podatci postaje Vostok, izuzev najvažnije značajke, a to je dubina: EPICA podatci sežu ~ 802 ky u prošlost za temperaturu i ~ 799 ky za koncentraciju ugljičnog dioksida. Također im je i gustoća različita: 5 788 točaka za temperaturu i 1 096 točaka za koncentraciju CO_2 . Gustoća podataka u odnosu na Vostok je za temperaturu gotovo ista (posljednji su nešto malo gušći), ali za CO_2 su EPICA podatci dvostruko gušći.

Zbog bolje gustoće za CO_2 , ali prvenstveno zbog dvostruke dubine, prvotni su podatci koje ćemo u ovom radu koristiti EPICA podatci [28] prikazani na sl. 1.2. Ta će nam dubina biti ključna: npr., vidjet ćemo da EPICA podatci ne daju klimatski period na ~ 400 ky, što u podacima s Vostoka po definiciji ne možemo ni gledati jer imamo samo jedan takav ciklus. Uz to, svi



(a) EPICA podatci za temperaturu.



(b) EPICA podatci za ugljični dioksid.

Slika 1.2: EPICA podatci za temperaturu i ugljični dioksid [28]. Za jedinice v. A Dodatak.

ostali periodi će biti istaknutiji, jer jednostavno imamo više jediničnih ciklusa za pojedini period. Stoga dalje gotovo stalno radimo s EPICA podacima.

Konačno, ni iz podataka postaje Vostok (sl. 1.1) ni iz podataka projekta EPICA (sl. 1.2) nije nimalo vidljiv fazni pomak podataka za temperaturu u odnosu na podatke za koncentraciju CO₂, a to je jedno od temeljnih pitanja na koja želimo odgovoriti jer pomak u fazi izravno daje odgovor na pitanje uzročno–posljedične veze koncentracije CO₂ i temperature. S druge strane, modeli koji će tvrdo teorijski opisati ovakve promjene gotovo da i ne postoje. Ova dva pitanja zadatak su sljedećih poglavlja.

2. POGLAVLJE

Atmosfera kao klasični idealni plin

2.1 Fizički opis atmosferskih promjena

Praćenje klime odnosno promjena u atmosferi seže daleko u prošlost, vjerojatno od postanka čovjeka i to, jasno, iz čisto praktičnih razloga. Skočimo li odmah u današnje doba i u položaj moderne znanosti zamijetit ćemo zanimljivu činjenicu. Premda su promjene atmosfere eksperimentalno jako dugo i precizno opažane, tako da je u eksperimentalnom pogledu ovo jedno od najpotpunijih znanstvenih područja, fizičke teorije koje bi dale fundamentalan opis opaženih promjena su jako rijetke. Što se posebno promjena temperature u atmosferi tiče, teorija je još slabija. Praktički gotovo da i nema ozbiljnije termodinamičke teorije koja bi odredila fundamentalne granice i pravilnosti u dinamici atmosferske temperature. Prvi je takav pokušaj početkom prošlog stoljeća napravio švedski fizičar i kemičar Svante Arrhenius (1859.–1927.), koji je promatrao atmosferu čisto kao ravnotežni idealni plin izložen kombinaciji nekoliko zračenja [5, 6]. Druga je zanimljiva teorija stotinjak godina mlađa (ali jedna od rijetkih koje su se uhvatile u koštac s ovim problemom), tzv. adijabatska teorija Sorokhtina i Chillingara [13, 14, 15, 32, 61, 63]. Ovdje ćemo iznijeti temeljne postavke obiju teorija, a za drugu ćemo donijeti nešto šire proračune i dati kritički osvrt jer trenutno ne postoji u literaturi.

2.2 Arrheniusova teorija

Želeći objasniti postanak ledenih doba o kojima se, kako kaže, tada živo raspravljalo, Svante Arrhenius je razvio teoriju učinka promjene koncentracije ugljičnog dioksida na temperaturu atmosfere i tako pionirski uveo staklenički učinak. Premda su ideje teorije objavljene kroz niz članaka, najiscrpnije i najdetaljnije je isnesena u njegovu članku [5] iz 1896. i u knjizi [6] iz 1903. Ovdje ćemo izvesti njegovu teoriju prema članku [5].

2.2.1 Temeljne pretpostavke teorije

Prva je Arrheniusova pretpostavka da zrak u atmosferi prima toplinu na dva načina:

- (a) *selektivnom difuzijom*, kojom se uglavnom prenosi toplina Sunčeva UV zračenja jer je neosjetljiva na dio spektra kojem odgovara zračenje sa Zemlje;
- (b) *selektivnom apsorpcijom*, koja je neosjetljiva na vidljivi i UV dio spektra ali dominira u infracrvenom dijelu, dakle glavna je za prijenos topline sa Zemlje.

Na temelju tadašnjih mjerenja Arrhenius pretpostavlja da su glavne sastojnice atmosfere koje su odgovorne za prijenos topline vodena para i ugljični dioksid¹. Nadalje pretpostavlja, i to opet na temelju nekoliko pokusa prije njega, da povećanje ovih sastojnica zraka ne utječe bitno na gornji učinak (a), a utječe na (b) odnosno na upijanje topline sa Zemlje.

U određivanju temperature atmosfere na temelju temperature Zemljine površine zanemaruje se grijanje vođenjem topline iz unutrašnjosti Zemlje i pretpostavlja se da se stopa ukupnog vođenja topline na neko mjesto ne mijenja u vremenu. Oblaci se u modelu smatraju statičnima, tako da je

¹U izvornom radu, da ne bude zabune, Arrhenius ugljični dioksid (CO_2) naziva *ugljična kiselina* (eng. *carbonic acid*) u skladu s tadašnjim kemijskim nazivljem.

jedini čimbenik koji utječe na promjenu temperature *propusnost* (eng. *transparency*) atmosfere. Ukratko, prethodno znači da je model statičan. Na posljetku, temeljna je i ključna pretpostavka modela da su Zemlja i atmosfera u termodinamičkoj ravnoteži, što znači (i) da atmosfera otpušta u svemir isto topline koliko prima zračenjem sa Sunca, zračenjem s površine Zemlje i konvekcijom zraka s površine Zemlje (izvorno eng. “*by means of ascending currents*”) te (ii) da Zemlja otpušta u atmosferu onoliko topline koliko primi Sunčevim zračenjem (onaj dio koji se ne upije u atmosferi). Zanimljivo se zračenje sa Sunca kojeg atmosfera reflektira u svemir i pretpostavlja se da se zračenje reflektirano sa Zemlje ne upija u atmosferu.

2.2.2 Promjena temperature zbog promjene propusnosti

Zamislimo da imamo dva siva tijela jedno u drugom: unutarne zrači prema van, između je međuprostor, a vanjsko zrači na obje strane. Neka je propusnost² i temperatura površine unutrašnjeg $1 - A'$ i T a vanjskog $1 - A''$ i Θ . Tada je količina zračenja s površine unutrašnjeg prema Stefan–Boltzmannovu zakonu $(1 - A')\sigma T^4$, a dio od toga koji je predan unutrašnjoj površini vanjskog tijela je $(1 - A')(1 - A'')\sigma T^4$. Međutim, ta površina također zrači količinu topline $(1 - A'')\sigma \Theta^4$ prema unutra, a od toga unutrašnje tijelo upija $(1 - A')(1 - A'')\sigma \Theta^4$. Prema tome, ukupan je prijenos topline s unutrašnjeg na vanjsko tijelo

$$W = (1 - A')(1 - A'')\sigma(T^4 - \Theta^4). \quad (2.1)$$

Shvatimo li prethodna dva tijela kao Zemlju (unutrašnje) i atmosferu (vanjsko), možemo napisati ukupnu jednadžbu za prijenos topline za pojedino tijelo. Ukoliko jakost Sunčeva zračenja označimo s I_{\odot} (v. tablicu 1.2) i koeficijent apsorpcije atmosfere za Sunčevo zračenje s $1 - A$, te uvedemo Q_{\uparrow} kao toplinu koja se preda atmosferi sa Zemlje drugim putevima osim zračenja, prvenstveno vođenjem i strujanjem, a Q_{\downarrow} kao isto to u drugom smjeru, tj. toplinu predanu Zemlji drugim mehanizmima osim zračenja,

²Ovdje je A veličina koja odgovara koeficijentu refleksije i zove se *albedo*. Budući da je to veličina koja se navodi u svim tablicama, izražavamo propusnost preko nje.

možemo napisati jednadžbu za ravnotežu atmosfere prema pretpostavkama na kraju prethodnog odlomka:

$$\sigma(1 - A'')\Theta^4 = (1 - A')(1 - A'')\sigma(T^4 - \Theta^4) + (1 - A)I_{\odot} + Q_{\uparrow\uparrow}. \quad (2.2)$$

Prvi je član toplina otpuštena iz atmosfere u svemir, drugi je toplina predana sa Zemlje atmosferi (jednadžba (2.1)), treći je Sunčevo zračenje upijeno u atmosferi i četvrti ($Q_{\uparrow\uparrow}$) je toplina koja se preda atmosferi sa Zemlje drugim putevima osim zračenja, prvenstveno vođenjem i strujanjem. Slična je jednadžba za Zemljinu površinu:

$$(1 - A')(1 - A'')\sigma(T^4 - \Theta^4) + A''\sigma(1 - A')T^4 = A(1 - A')I_{\odot} + Q_{\downarrow\downarrow}. \quad (2.3)$$

Prvi je član toplina otpuštena u atmosferu, drugi toplina otpuštena u svemir (koja nije upijena u atmosferi), treći je zračenje sa Sunca koje nije upijeno u atmosferi i četvrti je analogan $Q_{\uparrow\uparrow}$, samo u drugom smjeru, tj. toplina predana Zemlji drugim mehanizmima osim zračenja.

Jednadžbe (2.2) i (2.3) predstavljaju sustav dviju jednadžbi s dvjema nepoznicama (T i Θ) te parametrom $1 - A''$, dok su sve ostalo poznate stalnice. Iz prve jednadžbe (2.2) očitavamo Θ^4 , čijim ubacivanjem u drugu imamo:

$$\begin{aligned} T^4 &= \frac{\frac{(1-A')((1-A)I_{\odot}+Q_{\uparrow\uparrow})}{1+(1-A')} + A(1-A')I_{\odot} + Q_{\downarrow\downarrow}}{(1-A')(1-A'')\sigma - \frac{\sigma(1-A'')(1-A')^2}{1+(1-A')} + \sigma A''(1-A')} \\ &= \frac{(1+A-AA')I_{\odot} + Q_{\uparrow\uparrow} + (1+\frac{1}{1-A'})Q_{\downarrow\downarrow}}{(1+A''-A'A'')\sigma} \\ &\equiv \frac{K}{1+A''(1-A')}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Oдавde odmah možemo vidjeti općenit zaključak: T je (monotono) padajuća funkcija od A'' , odnosno rastuća od $1 - A''$, koji je mjera upijanja zračenja atmosfere sa Zemlje. Dakle, smanjenje atmosferskog albeda na zračenje sa Zemlje uzrokovat će povećanje temperature površine Zemlje.

Jedna je zamjerka ovom modelu da implicitno pretpostavlja da je raspodjela temperature u atmosferi jednolika, a mi znamo da tome nije tako:

znamo da temperatura opada s visinom, što će umanjiti prvi član u (2.2) i (2.3). Arrhenius je koristeći tadašnje podatke iz pokusa procijenio razliku najvišeg i najnižeg sloja značajnog za našu analiza na 42 K. Dakle, za ovu popravku treba uvrstiti $(\Theta + 42 \text{ K})^4$ umjesto Θ^4 u drugi član jednadžbe (2.2) odnosno u prvi član jednadžbe (2.3). Kad ponovimo račun, ova popravka ulazi u konačan rezultat kao stalnica C u nazivniku (2.4):

$$T^4 = \frac{K}{1 + CA''(1 - A')}. \quad (2.5)$$

Međutim, vrijednost je C oko 1 (1 do 2), i u konačnici praktično daje popravku od pola do 1 %.

2.2.3 Stvarni podatci i procjena

Koristeći geografske i meteorološke podatke za stalnice u jednadžbi (2.4) Arrhenius je izračunao promjene temperature uzrokovane promjenama koncentracije ugljičnog dioksida za razne geografske širine i godišnja doba. Tablica iz njegova izvornog rada — da malo dočaramo i duh vremena — prikazana je na

TABLE VII.—*Variation of Temperature caused by a given Variation of Carbonic Acid.*

Latitude.	Carbonic Acid = 0.67.						Carbonic Acid = 1.5.						Carbonic Acid = 2.0.						Carbonic Acid = 2.5.						Carbonic Acid = 3.0.						
	Dec.- Feb.	March- May.	June- Aug.	Sept.- Nov.	Mean of the year.	Dec.- Feb.	March- May.	June- Aug.	Sept.- Nov.	Mean of the year.	Dec.- Feb.	March- May.	June- Aug.	Sept.- Nov.	Mean of the year.	Dec.- Feb.	March- May.	June- Aug.	Sept.- Nov.	Mean of the year.	Dec.- Feb.	March- May.	June- Aug.	Sept.- Nov.	Mean of the year.	Dec.- Feb.	March- May.	June- Aug.	Sept.- Nov.	Mean of the year.	
70	-2.9	-3.0	-3.4	-3.1	-3.1	3.3	3.4	3.8	3.6	3.32	6.0	6.1	6.0	6.1	6.05	7.9	8.0	7.9	8.0	7.95	9.1	9.3	9.4	9.4	9.3	9.3	9.1	9.3	9.4	9.4	9.3
60	-3.0	-3.2	-3.4	-3.3	-3.22	3.4	3.7	3.6	3.8	3.62	6.1	6.1	5.8	6.1	6.02	8.0	8.0	7.6	7.9	7.87	9.3	9.5	8.9	9.5	9.3	9.3	9.1	9.3	9.5	9.4	9.3
50	-3.2	-3.3	-3.3	-3.4	-3.3	3.7	3.8	3.4	3.7	3.65	6.1	6.1	5.5	6.0	5.92	8.0	7.9	7.0	7.9	7.7	9.5	9.4	8.6	9.2	9.17	8.82	9.3	9.0	8.2	8.8	8.82
40	-3.4	-3.4	-3.2	-3.3	-3.32	3.7	3.6	3.3	3.5	3.52	6.0	5.8	5.4	5.6	5.7	7.9	7.6	6.9	7.3	7.42	9.3	9.0	8.2	8.8	8.82	9.3	9.0	8.2	8.8	8.82	
30	-3.3	-3.2	-3.1	-3.1	-3.17	3.5	3.3	3.2	3.5	3.47	5.6	5.4	5.0	5.2	5.3	7.2	7.0	6.6	6.7	6.87	8.7	8.3	7.5	7.9	8.1	8.7	8.3	7.5	7.9	8.1	
20	-3.1	-3.1	-3.0	-3.1	-3.07	3.5	3.2	3.1	3.2	3.25	5.2	5.0	4.9	5.0	5.02	6.7	6.6	6.3	6.6	6.52	7.9	7.5	7.2	7.5	7.52	7.52	7.9	7.5	7.2	7.5	7.52
10	-3.1	-3.0	-3.0	-3.0	-3.02	3.2	3.2	3.1	3.1	3.15	5.0	5.0	4.9	4.9	4.95	6.6	6.4	6.3	6.4	6.42	7.4	7.3	7.2	7.3	7.3	7.3	7.4	7.3	7.2	7.3	7.3
0	-3.0	-3.0	-3.1	-3.0	-3.02	3.1	3.1	3.2	3.2	3.15	4.9	4.9	5.0	5.0	4.95	6.4	6.4	6.6	6.6	6.5	7.3	7.3	7.4	7.4	7.35	7.35	7.4	7.3	7.4	7.4	7.35
-10	-3.1	-3.1	-3.2	-3.1	-3.12	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	5.0	5.0	5.2	5.1	5.07	6.6	6.6	6.7	6.7	6.62	7.4	7.5	8.0	7.6	7.62	7.62	7.4	7.5	8.0	7.6	7.62
-20	-3.1	-3.2	-3.3	-3.2	-3.2	3.2	3.2	3.4	3.3	3.27	5.2	5.3	5.5	5.4	5.35	6.7	6.8	7.0	7.0	6.87	7.9	8.1	8.6	8.3	8.22	8.22	7.9	8.1	8.6	8.3	8.22
-30	-3.3	-3.3	-3.4	-3.4	-3.35	3.4	3.5	3.7	3.5	3.52	5.5	5.6	5.8	5.6	5.62	7.0	7.2	7.7	7.4	7.32	8.6	8.7	9.1	8.8	8.8	8.8	8.6	8.7	9.1	8.8	8.8
-40	-3.4	-3.4	-3.3	-3.4	-3.37	3.6	3.7	3.8	3.7	3.7	5.8	6.0	6.0	6.0	5.95	7.7	7.9	7.9	7.9	7.82	9.1	9.2	9.4	9.3	9.25	9.25	9.1	9.2	9.4	9.3	9.25
-50	-3.2	-3.3	—	—	—	3.8	3.7	—	—	—	6.0	6.1	—	—	—	7.9	8.0	—	—	—	9.4	9.5	—	—	—	—	9.4	9.5	—	—	—
-60	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

266

Prof. S. Archenauts on the Influence of Carbonic Acid

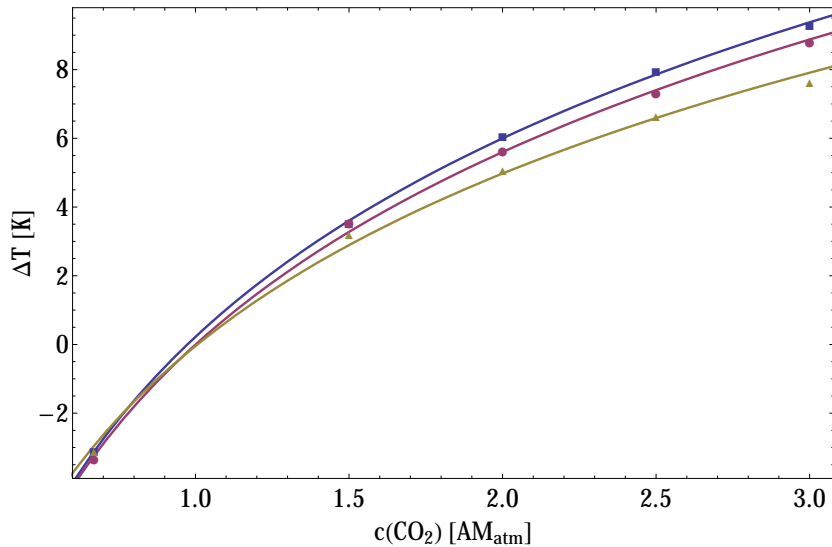
266 Prof. S. Arrhenius on the Influence of Carbonic Acid

Slika 2.1: Promjena temperature u odnosu na promjenu koncentracije CO₂. Preuzeto iz [5].

sl. 2.1. Uz činjenicu da zakon porasta temperature s porastom koncentracije ugljičnog dioksida vrijedi za Zemlju kao cjelinu, Arrhenius je prvi primijetio i sam izraz te pravilnosti, koja se po njemu zove Arrheniusov zakon: *ako se koncentracija ugljičnog dioksida povećava geometrijski, temperatura raste aritmetički*, odnosno:

$$T = T_0 \ln \frac{c(\text{CO}_2)}{c_0}. \quad (2.6)$$

Odmah se postavlja pitanje: zar nismo već izveli ovisnost T o koncentraciji ugljičnog dioksida u jednadžbi (2.4) jer je na početku razmatranja pretpostavljeno da A'' linearno ovisi o porastu koncentracije CO_2 ? Upravo zbog razlike parametara po područjima i vremenu u godini, zakon porasta temperature (2.4) izveden gore pri računanju stvarnih vrijednosti djelotvorno pokazuje logaritamsku ovisnost. Da to i slikovito pokažemo, na sl. 2.2 prikazali smo 3 skupa točaka iz tablice sa slike 2.1: srednje godišnje



Slika 2.2: Prilagođena funkcija (2.6) na tri skupa podataka iz Arrheniusove tablice (sl. 2.1): srednje godišnje vrijednosti za 70°-60° (plavi kvadratići), -10°-(-20°) (ljubičasti kružići) i za -30°-(-40°) (smeđi trokutići) geografske širine. AM_{atm} je stara jedinica ("air mass") za duljinu puta zrake svjetlosti u zraku, koja je mjera koncentracije.

vrijednosti za 70°-60°, -10°-(-20°) i za -30°-(-40°) geografske širine, odnosno prvi, deseti i dvanaesti redak za 6., 11., 16., 21. i 26. stupac.

2.2.4 Kritika Arrheniusova modela

Ovaj model jasno postavlja staklenički učinak upravo u onom obliku u kojem je najšire poznat. Pretpostavljajući da je grijanje atmosfere posljedica kapaciteta određenih plinova (koji se stoga zovu staklenički plinovi, eng. *greenhouse gases*) da više ili manje upijaju toplinsko zračenje sa Zemlje, ovaj model formalno pokazuje kako iz te pretpostavke slijedi zaključak da povećanje koncentracije ugljičnog dioksida kao glavnog predstavnika stakleničkih plinova uzrokuje povećanje temperature Zemljine površine i atmosfere [5, 51].

Zapravo, ovaj je model u osnovi svih današnjih predviđanja o tzv. *globalnom zatopljenju* zbog industrijskog ispuštanja određene količine CO_2 u atmosferu. Premda star sto godina i definitivno prejednostavan (točnije, dobrim dijelom utemeljen na procjenama), koristi se kao intuitivan teorijski argument za postojanje globalnog zatopljenja. U stvari, i kao takav se rijetko koristi jer se kao argumenti uglavnom navode meteorološki podatci kroz zadnjih dvjestotinjak godina, dakle eksperimentalna potkrjepa, a Arrheniusova teorija se uzima kao argument samo kada je potrebno teorijsko objašnjenje tih podataka.

Međutim, primijetimo zajedno s dijelom znanstvene zajednice da je glavna boljka modela, uz njegovu izrazitu jednostavnost, i ono što smo već na početku naveli kao pretpostavku, a to je *statičnost*. To je glavni razlog zbog kojeg možemo dovesti u pitanje rezultate teorije. Naime, atmosfera je dinamičan termodinamički sustav na takvoj prostornoj ljestvici i s takvim svojstvima da se za potpun i dobar opis njegovih svojstava nužno mora uračunati dinamika. Ovakav model jednostavno ne govori ništa o daljnjim promjenama usljed povećanja temperature atmosfere. Ukoliko kao glavni čimbenik gubitka topline iz atmosfere pretpostavimo zračenje u svemir iz gornjih slojeva (što jest Arrheniusova pretpostavka) i ako postoji razlika u temperaturi između najnižeg i najvišeg sloja atmosfere (također pretpostavljeno — sjetimo se popravke (2.5) upravo zbog toga), nije li logično pretpostaviti i u model uračunati strujanje (konvekciju) toplog zraka iz donjih slojeva u gornje? Uz ovaj smjer, ne bi li trebalo uračunati i mogućnost strujanja u late-

ralnom smjeru, tj. na istoj visini, npr. usljed pojačane sinoptičke aktivnosti, koja može znatno izmijeniti temperaturu određenog položaja (relacija (2.4))? Ovakvu nadogradnju i istodobno kritiku predstavlja adijabatska teorija.

2.3 Adijabatska teorija

Adijabatsku su teoriju vrlo nedavno (zadnjih 10 do 20 godina) uveli O. G. Sorokhtin, G. V. Chilingar i L. F. Khilyuk, što u nizu članaka [13, 14, 15, 32, 61], što u svježe izdanoj knjizi [63]. Ovdje ćemo kratko predstaviti teoriju, izvesti njene glavne rezultate, dio kojih nije izveden ni u jednoj gore navedenoj publikaciji, te je proširiti i na kraju dati komentar.

2.3.1 Pretpostavke teorije

Glavni čimbenici koji određuju klimu na Zemlji — u tome se svi slažu — su svakako:

- (a) jakost Sunčeva zračenja u danom trenutku i u prošlosti;
- (b) gustoća i sastav Zemljine atmosfere tj. moć upijanja tog zračenja i zračenja sa Zemlje.

Ideja koja gotovo stotinu godina dominira ovim dijelom znanosti je da određeni plinovi (staklenički plinovi) najviše doprinose drugom učinku, što je više–manje provjerena pretpostavka. Međutim, iduća je pretpostavka, što je ujedno i rezultat prethodne, statične Arrheniusove teorije, da povećanje koncentracije tih plinova uzrokuje povišenje temperature atmosfere i Zemljine površine. No, (i) Arrheniusova teorija i zakon logaritamskog rasta još uvijek je samo teorija, s nedostacima navedenim u odjeljku 2.2.4, koja je već tada, prije 100 godina, prihvaćena bez da je bila eksperimentalno tvrdo provjerena; (ii) zaključak da će atmosfera biti toplija što je više stakleničkih plinova jest i intuitivan i koliko–toliko očit. Međutim, to još ne znači da je točan.

Naime, sjetimo se tzv. *kopernikanskog obrata*. Svakom je čovjeku tada bilo (a i danas je) i intuitivno i očito ono što je predlagala uvriježena teorija, a to

je da se Sunce giba oko Zemlje. Uostalom, to je svakidašnje iskustvo svakoga čovjeka. Ipak, ispostavilo se da ono što je svima očito ipak nije istinito i nastala je nova teorija o heliocentričnom sustavu. Svaka se fizička teorija, pa tako i Arrheniusova odnosno teorija stakleničkog učinka, uvijek treba moći zapitati živi li u eri prije kopernikanskog obrata. Točnije, pokriva li ono što je “očito” neki drugi model na ispravan način dok trenutni to “pokriva” na neispravan način?

Kao rezultat takvog propitkivanja, ali i potrebe za boljom teorijom međutjecaja temperature i koncentracije ugljičnog dioksida, predložena je adijabatska teorija stakleničkog učinka. Osim što propitkuje smjer utjecaja gore navedenog čimbenika (b), ova teorija daje kritiku prethodnoj na račun zane-marivanja čimbenika (a) odnosno njegovih promjena kroz geološku prošlost na fluktuacije temperature na Zemlji.

Atmosfera je disipativan i nelinearan dinamički sustav koji ujedinjuje mnoštvo međutjecaja koje okvirno, prema shemi u Uvodu, zovemo “oscilatorima” (u širem smislu). Zbog takvog karaktera atmosfera ima mogućnost stvaranja stabilnih termodinamičkih struktura u vremenu, koje su pak određene parametrima dinamičkog procesa. Ovdje su ti parametri primjerice molna masa zraka u atmosferi, svojstveni toplinski kapacitet, albedo, jakost Sunčeva zračenja, precesijski kut Zemlje, itd.

Iz ovog je odmah očit i napredak ovakve teorije u odnosu na prethodnu: ova će teorija dati i rješenja utjecaja strukture atmosfere na njene promjene kao i mogućnost uključenja dodatnih i lokalnih parametara, npr. visina, tok topline ciklonama i anticiklonama, snijeg, itd. Prethodna Arrheniusova teorija bila je globalna jer je izvedena za općenitu točku na Zemljinoj površini i sve točke u stupcu zraka iznad nje — bilo gdje na Zemlji, pa je po definiciji isključivala prethodne dvije mogućnosti.

Zbog bitno različitih svojstava, mehanizmi prijenosa topline nisu isti za sve dijelove atmosfere (v. odjeljak 1.1 na str. 5). U troposferi zbog velike gustoće prednjači *konvekcija* odnosno strujanje (i) dok u dosta rjeđoj mezosferi i stratosferi prednjači upijanje Sunčeva UV zračenja odnosno *radijacija*

(ii). Tomu treba pridodati još prijenos topline kondenzacijom/isparavanjem *vodne pare* (iii). Ovo su tri osnovna načina prijenosa topline u atmosferi.

Bitno je napomenuti, da ne bude zabune, da adijabatska teorija ne daje promjenu temperature u atmosferi s visinom: za to postoje drugi klimatološki modeli i mjerenja. Ova teorija daje učinak promjene koncentracije ugljičnog dioksida na promjenu temperature — to je njen glavni cilj. No, krenimo postepeno do tog cilja.

2.3.2 Promjena tlaka u troposferi

Prije upuštanja u samu teoriju, koja — jer je adijabatska — bitno ovisi o tlaku, trebamo znati kako se tlak mijenja u troposferi kao sloju koji jedini sadrži dovoljno gust zrak da se može usporediti s idealnim plinom. Tu koristimo poznati rezultat.

Uzmimo određeni element volumena V na visini h iznad Zemljine površine. Pri stalnom tlaku i temperaturi pripadni je termodinamički potencijal Gibbsova slobodna energija $G = E + pV$ umjesto unutarnje energije E . U ovom slučaju ona će dobiti, uz član koji odgovara slobodnoj energiji klasičnog idealnog plina bez ovakve vanjske sile (označimo ga s G_0), i gravitacijsku energiju čestica u volumenu V :

$$G = G_0 + Nmgh, \quad (2.7)$$

gdje je N broj čestica u volumenu, m masa svake od njih, h visina i g težinsko ubrzanje. U ravnoteži će, budući da je derivacija G -a tada 0, G biti stalan. Očito nam ostaje naći G_0 , za kojeg znamo da vrijedi $G_0 = -kT \ln \mathcal{Z}$, gdje je \mathcal{Z} particijska funkcija za naš problem. Kako imamo stalan tlak i temperaturu, to nije kanonska particijska funkcija, nego njen ekvivalent Gibbsovoj slobodnoj energiji (tj. $E \rightarrow E + pV$):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \frac{1}{N! \Gamma_0^{3N}} \int e^{-\frac{E+pV}{kT}} d\Gamma dV \\ &= \frac{1}{N! \Gamma_0^{3N}} \int_0^\infty e^{-\frac{pV}{kT}} dV \int \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2mkT}\right) \prod_{i=1}^N d^3\mathbf{p}_i d^3\mathbf{r}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N!\Gamma_0^{3N}} \int_0^\infty e^{-\frac{pV}{kT}} dV \underbrace{\prod_{i=1}^N \int \exp\left(\frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2mkT}\right) d^3\mathbf{p}_i}_{C^N} V^N \\
&= \frac{C^N}{N!\Gamma_0^{3N}} \int_0^\infty V^N e^{-\frac{pV}{kT}} dV \\
&= \frac{1}{N!\tilde{C}^N} \left(\frac{kT}{p}\right)^{N+1} \underbrace{\int_0^\infty x^N e^{-x} dx}_{\Gamma(N+1)} \\
&= \left(\frac{kT}{\tilde{C}p}\right)^N. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Ovdje je redom: Γ_0 jedinični volumen faznog prostora, $d\Gamma$ element volumena faznog prostora, k Boltzmannova stalnica te \mathbf{p}_i i \mathbf{r}_i zalet i položaj čestice. Na početku je uključena norma faznog prostora i dobro Boltzmannovo brojanje, u drugom je redu uvrštena energija čestice idealnog plina, u trećem je prointegriran neovisni prostorni dio (V^N) i iskorišteno svojstvo da je eksponencijska funkcija zbroja produkt eksponencijskih funkcija pribrojnika (C^N), u petom je redefinirano $\tilde{C} = h^3/C$ i uvedena je zamjena $\frac{pV}{kT} \leftrightarrow x$ pod integralom, u šestom je konačno prepoznato da je integral definicija gama funkcije i iskorišteno je njeno svojstvo $\Gamma(n+1) = n!$ te približeno $N+1 \approx N$. Vratimo se s ovim u (2.7):

$$G = -kT \ln \mathcal{Z} + Nmgh = NkT \ln \frac{\tilde{C}p}{kT} + Nmgh = C, \tag{2.9}$$

odakle je

$$p = \frac{kT}{\tilde{C}} e^{\frac{C}{NkT}} e^{-\frac{mgh}{kT}} = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = p_0 e^{-\frac{qM}{RT}h}, \tag{2.10}$$

gdje smo uočili da je

$$\frac{m}{k} = \frac{m_{\text{uk}}}{kN} = \frac{m_{\text{uk}}}{nR} = \frac{M}{R}. \tag{2.11}$$

U prethodnom je $m_{\text{uk}} = Nm$ masa elementa volumena V kojeg analiziramo, n je njegova množina u molovima, R je opća plinska stalnica i M je molna masa izvedena u (1.4), str. 7. Ovime smo dobili zakon opadanja tlaka promjenom

visine u atmosferi. Za $h = 0$ imamo atmosferski tlak na površini Zemlje (v. tablicu 1.2).

2.3.3 Upijanje Sunčeva zračenja

Sunce smatramo usijanim crnim tijelom koje prema tome zrači gustoću snage $\sigma T_{\text{Sunce}}^4$. Poznavanjem temperature Sunca, odavde smo dobili jakost Sunčeva zračenja na površini Zemlje I_{\odot} navedenu u tablici 1.2. Ako Zemlju shvatimo kao sivo tijelo albeda A , onda će temperatura postignuta upijanjem zračenja (za precesijski kut $\psi = 0$; na to ćemo se još vratiti) biti obrat Stefan–Boltzmannova zakona:

$$T_{\text{ef}}^4 = \frac{(1 - A)I_{\odot}}{4\sigma}, \quad (2.12)$$

dok je odbijemo zračenje dano s $T_r = AI_{\odot}/4\sigma$. Da je Zemlja crno tijelo, to bi bilo $T_{\text{ct}} = I_{\odot}/4\sigma$. Množitelj 4 u nazivniku dolazi od činjenice da je djelotvorna upojna površina Zemlje njezin presjek (πR_{\oplus}^2) a ne cijela površina ($4\pi R_{\oplus}^2$), pa se djelotvorno upija 4 puta manje zračenja sa Sunca. Ovaj množitelj zovemo “geometrijski čimbenik” i njemu se vraćamo u idućem odlomku.

Zemljin prosječni albedo je dobro poznat i iznosi $A \approx 0.3$. Uvrštavanjem toga i vrijednosti iz tablice 1.2 u (2.12) dobivamo

$$T_{\text{ef}} = 254,872 \text{ K} \approx 255 \text{ K}. \quad (2.13)$$

Ova temperatura predstavlja djelotvornu temperaturu Zemlje gledane iz svemira, odnosno djelotvornu temperaturu koju “dobiva” Zemlja sa Sunca.

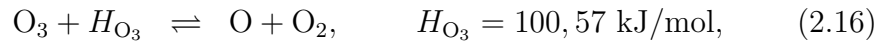
Staklenički učinak se definira kao razlika djelotvorne temperature T_{ef} Zemlje i njene površinske temperature $T_p = 15 \text{ °C} = 288 \text{ K}$ (znamo je iz mjerenja):

$$\Delta T = T_p - T_{\text{ef}} = 33 \text{ K}. \quad (2.14)$$

Dakle, klasična vrijednost stakleničke promjene temperature ΔT je 33 stupnja.

Za trenutnu Zemljinu temperaturu, međutim, gotovo presudnu ulogu ima trenutni albedo A , koji je izravna posljedica naoblačenja odnosno zasjenjenosti Zemlje oblacima. Djelotvorno, A zapravo možemo zamisliti kao Zemljin koeficijent refleksije Sunčeva zračenja u atmosferi. Usporedimo li temperaturu Zemljine površine T_p i T_{ef} , vidimo da A predstavlja negativnu povratnu spregu između njih: porast T_p uzrokuje pojačano isparavanje s površine, odnosno porast naoblačenja i porast albeda; to pak smanjuje upijanje Sunčeva zračenja i djelotvorno znači manje grijanje Zemlje odnosno manju T_{ef} , a time i manji T_p . S druge strane, za negativnu povratnu spregu iz teorije linearnog odgovora znamo da rezultira linearnom vezom, tj. znamo da je $T_p \sim T_{ef}$. Daljnji razvoj teorije će dati točnu vezu.

Zgodno je spomenuti i kvantne/kemijske mehanizme prijenosa topline zračenjem. Ono je bitan čimbenik u rijetkim slojevima stratosfere i mezosfere gdje se Sunčevo zračenje upija u fotokemijskim reakcijama disocijacije (i obratno). Glavne su reakcije pri tom:



gdje smo naznačili i pripadne energije reakcija, preuzete iz [18]. Pripadne su valne duljine redom: $\lambda_{O_2} = 242,11 \text{ nm}$, $\lambda_{O_3} = 1\,193,08 \text{ nm}$, $\lambda_{H_2O} = 242,28 \text{ nm}$, $\lambda_{CO_2} = 227,44 \text{ nm}$. Premda dušika ima najviše, nismo ga uopće pisali jer je jakost Sunčeva spektra na njegovoj energiji (941,69 kJ/mol; 127,02 nm) 4 reda veličine manja. Odavde imamo i jedan zanimljiv zaključak, a to je da je energija ozona u infracrvenom, a ne u ultraljubičastom spektru, pa ozon nije odgovoran za upijanje UV zračenja, dok svi ostali jesu, jer su u UV dijelu spektra. Klasična zabuna nastaje jer se energija *potpune* disocijacije ozona ($O_3 \rightarrow O_2 + O \rightarrow O + O + O$), koja očito iznosi $H_{O_2} + H_{O_3} = 594,49 \text{ kJ/mol}$ odnosno 201,2 nm i leži u UV spektru, poistovjećuje s energijom disocijacije ozona (2.16).

Od gore navedenih reakcija, ozon je beznačajan u izravnom upijanju Sunčeva UV spektra, ali je značajan jer daje osnovu za stvaranje kisika, koji je pak najznačajniji u upijanju budući da ga ima daleko najviše među reaktantima preostalih triju reakcija.

2.3.4 Geometrijski čimbenik

2.3.4.1 Slučaj $\psi = 0$

Množitelj 4 u nazivniku jednadžbe (2.12) je bio stavljen uz pretpostavku da je kut nagiba Zemlje prema ekliptičkoj ravnini (ψ) nula tj. da je Zemljin ekvator u ekliptičkoj ravnini. Nazovimo ga općenito B . Došao je iz općenita uočavanja da Stefan–Boltzmannov zakon vrijedi za intenzitet izračen preko cijele površine tijela, pa tako i njegov obrat (ako govorimo o apsorpciji). Međutim, u našem slučaju upojna površina nije površina kugle tj. $4\pi R_{\oplus}^2$, nego njen presjek: πR_{\oplus}^2 , pa je

$$B(\psi = 0) = \frac{4\pi R_{\oplus}^2}{\pi R_{\oplus}^2} = 4. \quad (2.19)$$

Ovdje smo jasno naznačili da se radi o slučaju kad je kut Zemljine osi i osi Sunca 0, odnosno kad je Zemljin ekvator u ekliptičkoj ravnini. Tada B zapravo možemo zamisliti kao omjer površine koja ukupno upija zračenje, a to je kugla jer se Zemlja okreće oko osi i djelotvorne površine koja upija odnosno projekcije koju zrake čine na tijelo koje upija, a to je krug okomit na ekvator.

2.3.4.2 Slučaj $\psi = \frac{\pi}{2}$

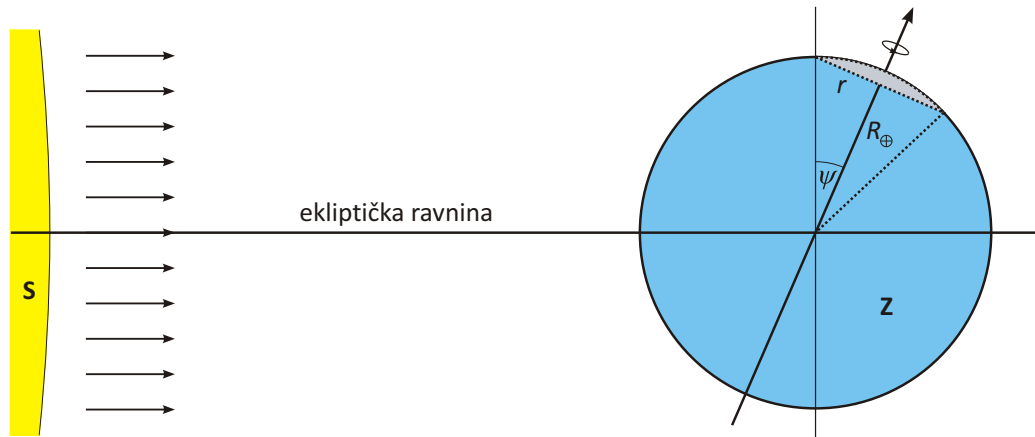
Zamislimo i suprotan “limes”, u kojem okretna os tijela koje upija zračenje leži u ekliptičkoj ravnini, tj. $\psi = \frac{\pi}{2}$. Zamislimo li sliku 2.3 za $\psi = \frac{\pi}{2}$, lako je uočiti da je ukupna površina koja upija zračenje pola površine kugle, a djelotvorna upojna površina je opet isti krug, pa je

$$B(\psi = \frac{\pi}{2}) = \frac{2\pi R_{\oplus}^2}{\pi R_{\oplus}^2} = 2. \quad (2.20)$$

Ovo je očito najmanji mogući množitelj u nazivniku formule (2.12) odnosno drugi ekstrem za $B(\psi)$. Primijetimo, što će nam trebati kasnije, da bi, ako bismo pola vremena obasjavanja izložili kuglu ovako, a drugu polovicu zaokrenuli os za π , tj. obasjvali je s druge strane ($\psi = -\frac{\pi}{2}$), konačan učinak bio isti kao da smo cijelo vrijeme kontinuirano okretali kuglu, tj. ukupna obasjana površina bi bila dvostruko veća odnosno površina kugle, pa bi tada B opet bio jednak 4.

2.3.4.3 Slučaj $\psi = 23,44^\circ$

Ipak, mi znamo da je Zemlja nagnuta prema ekliptičkoj ravnini pod kutom $\psi = 23,44^\circ$. Takva je situacija prikazana na sl. 2.3 u poprečnom presjeku. Sad je množitelj $B(\psi)$ — za općenit ψ — nešto složeniji. Naime, vidimo da za



Slika 2.3: Shema položaja Zemlje u odnosu na Sunce i ekliptičku ravninu.

sve dijelove izuzev polnog kruga na površini kugle, koji je na slici 2.3 označen isprekidanom crtom i sivom bojom, vrijedi isto kao da smo u slučaju $\psi = 0$, tj. množitelj za taj dio će biti $B_1 = 4$. Međutim, polni krug pri okretanju Zemlje oko osi nje obasjan, pa za nj naočigled vrijedi razmatranje za drugi slučaj, $\psi = \frac{\pi}{2}$, tj. $B_2 = 4$ (ne 2 jer se mijenja projekcija smjera rotacije na ekliptičku ravninu, kao što smo gore komentirali). Ovdje govorimo o zakrivljenoj površini, pa stvari nisu baš toliko jednostavne: izračunajmo doprinos tog dijela (polnog kruga) na isti način kao u dvama gornjim slučajevima, tj.

kao omjer obasjane površine i njene projekcije na ekvatorsku ravninu (to je djelotvorna mjera zakrivljenosti te površine):

$$B_2 = 2 \frac{\int_0^\psi R_\oplus d\vartheta \int_0^{2\pi} R_\oplus \sin \vartheta d\varphi}{\pi R_\oplus^2 \sin^2 \psi} = 2 \frac{2\pi R_\oplus^2 (1 - \cos \psi)}{\pi R_\oplus^2 \sin^2 \psi} = \frac{4}{1 + \cos \psi}. \quad (2.21)$$

Množitelj 2 je došao zbog učinka promjene smjera rotacije nakon pola godine, kao što je raspravljeno na kraju prethodnog odjeljka. Međutim, konačan izraz nije $B(\psi) = B_1(\psi) + B_2(\psi)$, jer ova dva dijela kugle, na koja smo rastavili problem, ne doprinose jednako, niti u omjeru u kojem su im površine u omjeru, pa ćemo imati

$$B = \zeta B_1 + \xi B_2 \quad (2.22)$$

i ostaje odrediti ζ i ξ . Vidimo da je učinak polnog dijela kugle, koji je stalno u sjeni (pola godine jedan pol, pola drugi) proporcionalan ψ : zamislimo li kuglin isječak za polni krug (otvornog kuta 2ψ), njegova će površina biti $2 \cdot 2\psi R_\oplus^2$, dok će površina preostalog dijela polukugle biti $2(\pi - 2\psi)R_\oplus^2$ — i ta dva faktora govore o relativnom značaju pojedinih dijelova prethodnog računa (naime, udio kruga u isječku je već uračunat u B_2). Dakle, ako rastavimo površine:

$$\begin{aligned} 2(\pi - 2\psi)R_\oplus^2 + 4\psi R_\oplus^2 &= 2\pi R_\oplus^2 & \Leftrightarrow \\ \underbrace{\frac{\pi - 2\psi}{\pi}}_\zeta + \underbrace{\frac{2\psi}{\pi}}_\xi &= 1, \end{aligned} \quad (2.23)$$

gdje smo težinske množitelje normirali na 1, kako bi davali dobre poznate limese: $B(0) = B_1$ i $B(\frac{\pi}{2}) = B_2$. Prema tome, konačno je

$$B(\psi) = \frac{\pi - 2\psi}{\pi} 4 + \frac{2\psi}{\pi} \frac{4}{1 + \cos \psi}. \quad (2.24)$$

Djelotvorna je temperatura Zemlje prema (2.12) sad

$$T_{\text{ef}}^4 = \frac{(1 - A)I_\odot}{B(\psi)\sigma} = \frac{(1 - A)I_\odot}{4\sigma \left(\frac{\pi - 2\psi}{\pi} + \frac{2\psi}{\pi} \frac{1}{1 + \cos \psi} \right)}. \quad (2.25)$$

Trenutni je Zemljin precesijski kut (v. tablicu 1.2) $23,44^\circ$, pa je

$$B(23,44) = 3,5015. \quad (2.26)$$

Odatle dobivamo popravljenu vrijednost djelotvorne temperature $T_{\text{ef}} = 263,5$ K. U proračunima za današnju Zemlju koristit ćemo nadalje taj broj, ali ovisnost (2.25) će nam kasnije još trebati.

2.3.5 Konvekcija kao adijabatski proces

Upravo zato što postoje tri različita mehanizma prijenosa topline, od kojih smo jedan upravo uveli, a dva ćemo sad još uvesti, atmosfera može preraspodijeliti temperaturu tako da ta raspodjela u troposferi bude adijabatska, tj. raspodjela koja će uravnotežiti širenje i hlađenje zraka pri usponu iz donjih slojeva (jer su topliji) te zbijanje i grijanje zraka pri spuštanju iz gornjih slojeva (jer su hladniji). Uočimo da, ukoliko konvekciju kao mehanizam izbacimo iz razmatranja, nemamo zahtjeva za ovom pretpostavkom: ona postoji kao zahtjev za uravnoteženje procesa konvekcije jer znamo da je atmosfera ravnotežna, a pri tom procesu nema neto prijenosa topline, tj. toplina se povećava ne zbog grijanja nego zbog povećanja tlaka, odnosno ne smanjuje se zbog izravna hlađenja nego zbog smanjenja tlaka. To je upravo adijabatski proces.

Vrijedi napomenuti da ovdje ne govorimo o adijabatskom procesu na kratkoj, trenutnoj vremenskoj ljestvici. Konvekcija je atmosferski proces na vremenskoj ljestvici od nekoliko do mjesec dana, pa na toj ljestvici vrijedi i naš zahtjev za adijabatičnošću. Ipak, u odnosu na period promjena Zemljine klime, takva ljestvica (mjesec dana) zapravo znači “trenutno”.

Jednadžba adijabatskog procesa dobro je poznata:

$$pV^\gamma = C, \quad (2.27)$$

gdje je C stalnica, a γ je adijabatski koeficijent dan kao omjer (svojstvenih) toplinskih kapaciteta pri stalnom tlaku u stalnom volumenu:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} \quad (2.28)$$

i iznosi približno 1,3 za troatomne plinove, a 1,4 za dvoatomne plinove. Ovdje smo označili velikim slovima toplinske kapacitete, a malim svojstvene toplinske kapacitete. Takvo će se obilježavanje koristiti do kraja rada. Uvrštavanjem jednadžbe stanja idealnog plina ($pV = NkT$) za V u (2.27) dobivamo $p^{1-\gamma}(NkT)^\gamma = C$ odnosno

$$T = \frac{C^{\frac{1}{\gamma}}}{Nk} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = Cp^\alpha, \quad (2.29)$$

gdje smo redefinirali stalnicu C ($\frac{C^{\frac{1}{\gamma}}}{Nk} \rightarrow C$) i uveli novi adijabatski koeficijent

$$\alpha = \frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{C_p - C_V}{C_p}. \quad (2.30)$$

Od sad nadalje α nazivamo adijabatskim koeficijentom. Koristeći spomenute γ , α za troatomne plinove iznosi 0,2308, dok za dvoatomne iznosi 0,2857. To su vrijednosti za “samu” atmosferu, tj. za suh zrak bez uzimanja u obzir prijenosa topline zračenjem.

2.3.5.1 Izračun α

Sad želimo odrediti općenit izraz za α iz (2.30), jer ne znamo C_V . Po definiciji su toplinski kapaciteti:

$$C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \quad \text{i} \quad C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V. \quad (2.31)$$

Primjenom Eulerova teorema za funkcije više varijabli imamo

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p &= \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial T} \right)_p \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + \frac{C_V}{T}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Tu smo iskoristili Maxwellovu relaciju dobivenu pomoću Helmholtzove slobodne energije definirane kao $dF = -SdT - pdV$: očito je

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \quad \text{i} \quad p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad (2.33)$$

odnosno

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = -\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V. \quad (2.34)$$

Sad iz (2.32) za idealni plin imamo

$$C_p - C_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = T \frac{nR}{V} \frac{nR}{p} = nR, \quad (2.35)$$

odnosno

$$\alpha = \frac{C_p - C_V}{C_p} = \frac{nR}{mc_p} = \frac{R}{Mc_p}, \quad (2.36)$$

gdje smo u prvoj jednakosti iskoristili (2.35) i definiciju svojstvenog toplinskog kapaciteta $c_p = C_p/m$, a u drugoj definiciju molne mase M , $M = m/n$, gdje je n množina tvari u molovima.

Kad u (2.36) uvrstimo svojstveni toplinski kapacitet atmosfere iz prvog poglavlja (jednadžba (1.1), str. 6) i molnu masu atmosfere (jednadžba (1.4), str. 7) te vrijednost plinske stalnice R , dobijemo $\alpha = 0,2854$. Vidimo da je ovo približno adijabatskom koeficijentu za dvoatomne plinove: to je i očekivano, jer najveći udio u atmosferi pripada dušiku (v. tablicu 1.1) koji je dvoatomni plin (N_2). Ipak, kad se svi mehanizmi uzmu u obzir, eksperimentalne podatke najbolje opisuje djelotvorna vrijednost $\alpha = 0,1905$ [14, 63].

2.3.5.2 Temperatura u troposferi

Sad možemo napisati izraz koji će opisivati prosječnu temperaturu na nekoj visini u troposferi. Ograničavamo se na ovaj pojas jer samo u njemu postoji konvekcija budući da je jedini dovoljno gust za to, pa stoga samo u njemu vrijedi i zahtjev za adijabatičnošću.

Uzmemo li (2.29) kao temperaturu u troposferi, a

$$T_p = Cp_0^\alpha \quad (2.37)$$

kao temperaturu površine, dijeljenjem (2.29) i prethodnoga dobivamo

$$T = T_p \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha. \quad (2.38)$$

Standardan način kako autori teorije prikazuju ovu ovisnost je

$$T = b^\alpha T_{\text{ef}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha \quad (2.39)$$

odnosno uvrštavanjem (2.25) za T_{ef}

$$T = b^\alpha \left(\frac{(1-A)I_\odot}{4\sigma \left(\frac{\pi - 2\psi}{\pi} + \frac{2\psi}{\pi} \frac{1}{1 + \cos \psi} \right)} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha, \quad (2.40)$$

gdje se $b^\alpha \equiv T_p/T_{\text{ef}}$ naziva *čimbenik ljestvice* (eng. *scale factor*). Jednadžba (2.40) zove se *jednadžba adijabatske teorije*.

Nije naočigled jasno gdje je u (2.40) odnosno (2.38) ovisnost o visini. Upravo sad dolazimo na pravi razlog izvođenja promjene tlaka s visinom u odjeljku 2.3.2: ta se ovisnost krije upravo u tlaku p , koji je jednadžbom (2.10) određen visinom h iznad Zemlje.

2.3.6 Prijenos topline kondenzacijom/isparavanjem

Ovo je treći mehanizam prijenosa topline u adijabatskoj teoriji. Naime, uz ulogu u izmjeni albeda stvaranjem oblaka, vlaga u zraku ima i izravan doprinos prijenosu topline pri tom procesu. U vlažnoj atmosferi se pri kondenzaciji vodene pare otpušta toplina kondenzacije odnosno grije se okolina kondenzata; pri isparavanju se analogno okolina hladi na račun kondenzata, tj. ulaže toplinu u grijanje kondenzata do temperature isparavanja.

Toplina otpuštena kondenzacijom je poznata konstanta, $Q_v = 2\,494,49$ kJ/kg. Označimo li toplinski kapacitet koji odgovara djelotvornom prijenosu topline pri kondenzaciji vodene pare s C_v ³, promjena temperature uzrokovana ovim procesom je

$$\Delta T_v = \frac{Q_v}{C_v}. \quad (2.41)$$

Kapacitet C_v odredit ćemo kasnije.

³Paziti da ne bude zabune, u C_v je malo “v” koje znači “voda”, a u C_V gore je veliko V koje znači “volumen”.

Budući da je toplinski kapacitet suhog zraka manji nego vodene pare, ako su svi ostali čimbenici stalni, suha će atmosfera biti toplija nego vlažna, a time i Zemljina površina ispod takve atmosfere.

2.3.7 Relativni udjeli mehanizama

Konačno želimo vidjeti relativne udjele pojedinih mehanizama (radijacija, konvekcija, kondenzacija) u prijenosu topline. Te udjele možemo “spremiti” u toplinske kapacitete, odnosno izraziti ih preko njih, tako da uvedemo djelotvorni toplinski kapacitet:

$$c_{\text{ef}} = c_r + c_p + c_v, \quad (2.42)$$

gdje će prvi odražavati prijenos topline radijacijom, drugi prijenos topline konvekcijom a treći prijenos topline kondenzacijom/isparavanjem vodene pare. Uvrštavanjem toga u (2.36) imamo

$$c_r + c_v = \frac{R}{\alpha M} - c_p. \quad (2.43)$$

Radijacijski dio c_r možemo izračunati [14, 63] (prema [59]) i dan je relacijom

$$c_r = \frac{R}{\alpha M} \left(1 - \frac{T_{\text{ef}}}{T_p} \right) = 129,139 \text{ J/kg K}, \quad (2.44)$$

gdje smo konačan rezultat dobili uvrštavanjem poznatih parametara. Vraćanjem (2.44) u (2.43) dobivamo i c_v :

$$c_v = \frac{R}{\alpha M} \frac{T_{\text{ef}}}{T_p} - c_p = 371,815 \text{ J/kg K}. \quad (2.45)$$

Uz poznati c_p (1.1), lako je odrediti relativne udjele pojedinih svojstvenih toplinskih kapaciteta, što je mjera relativnog udjela pojedinog učinka:

$$\frac{c_p}{c_{\text{ef}}} = 66,754\% \quad (2.46)$$

$$\frac{c_v}{c_{\text{ef}}} = 24,676\% \quad (2.47)$$

$$\frac{c_r}{c_{\text{ef}}} = 8,570\%. \quad (2.48)$$

Možemo otići i korak dalje, ali ovo ćemo uzeti čisto kao procjenu (!). Uvrstimo li (2.42) u (2.36) s tim da c_p u (2.36) postaje c_{ef} , dobivamo

$$\frac{1}{\alpha} = \underbrace{\frac{Mc_r}{R}}_{1/\alpha_r} + \underbrace{\frac{Mc_p}{R}}_{1/\alpha_p} + \underbrace{\frac{Mc_v}{R}}_{1/\alpha_v}, \quad (2.49)$$

tj. možemo pojedine članove sume shvatiti kao α svojstven određenom mehanizmu. Jakost zračenja koju Zemlja izrač, označimo je s I_{\oplus} , je

$$I_{\oplus} = \frac{\sigma T_{ef}^4}{1-A} = \frac{\sigma T_p^4}{1-A} \frac{1}{b^{4\alpha}}, \quad (2.50)$$

pa sad možemo kao svojevrsnu mjeru pogledati količinu topline otpuštene s površine Zemlje pojedinim mehanizmom, tako da preostala dva zanemarimo, tj. pretpostavimo na trenutak kao da se toplota prenosi samo određenim jednim mehanizmom. Uvrštavanjem parametara u definicije (2.49) dobivamo pojedine α -e, pa imamo:

$$\alpha_p = 0,2854 \Rightarrow I_{\oplus,p} = 326,785 \text{ J/m}^2 \text{ s}, \quad \frac{I_{\oplus,p}}{I_{\oplus,uk}} = 70,088\% \quad (2.51)$$

$$\alpha_v = 2,2228 \Rightarrow I_{\oplus,v} = 130,890 \text{ J/m}^2 \text{ s}, \quad \frac{I_{\oplus,v}}{I_{\oplus,uk}} = 28,075\% \quad (2.52)$$

$$\alpha_r = 0,7720 \Rightarrow I_{\oplus,r} = 8,559 \text{ J/m}^2 \text{ s}, \quad \frac{I_{\oplus,r}}{I_{\oplus,uk}} = 1,836\%. \quad (2.53)$$

Zapažanja u jednadžbama (2.46–2.48) te (2.51–2.53) zapravo su temeljna poruka adijabatske teorije i njen vrhunac: najizraženiji mehanizam prijenosa topline u atmosferi nije radijacija (tj. apsorpcija radijacije) nego konvekcija, pa kondenzacija, pa tek na zadnjem mjestu radijacija.

Klasična Arrheniusova teorija u ovom cijelom mehanizmu uračunava onaj dio koji se odnosi na radijaciju, tj. dio topline koji zrak u donjem sloju troposfere primi apsorpcijom Zemljina infracrvenog zračenja i radijacijski otpusti kad dođe na vrh, na granicu sa stratosferom. Međutim, konvekciju koja se događa između uopće ne tretira, i poruka adijabatske teorije je upravo da je taj dio koji je klasična teorija uračunala kao jedini, zapravo najmanji, a dominira konvekcijski prijenos topline.

2.3.8 Utjecaj porasta koncentracije CO₂

Objedinjujući relacije (2.38) za temperaturu i (2.10) za promjenu tlaka s visinom, možemo dobiti konačnu relaciju za temperaturu

$$T = T_p e^{-\frac{\alpha g M}{RT} h} \quad (2.54)$$

odnosno logaritmiranjem i preuređivanjem

$$\frac{T}{T_p} \ln \frac{T}{T_p} = -\frac{\alpha g M h}{RT_p} \stackrel{(2.36)}{=} -\frac{gh}{c_{ef} T_p}. \quad (2.55)$$

Sad, za procjenu možemo napraviti ekstreman slučaj: pretpostavimo da atmosferu potpuno zamijenimo s čistim ugljičnim dioksidom. Na nekoj danoj visini, jedino što se mijenja u odnosu na običnu atmosferu je svojstveni toplinski kapacitet: za zrak je $c_{ef} = c_r + c_p + c_v = 1506,793 \text{ J/kg K}$ (v. relacije (1.1), (2.44) i (2.45)), dok je $c_{\text{CO}_2} = 833 \text{ J/kg K}$ (v. tablicu 1.1). No, niži toplinski kapacitet ugljičnog dioksida znači i manju (negativniju) vrijednost funkcije $\frac{T}{T_p} \ln \frac{T}{T_p}$. A kako je ta funkcija u domeni koja je ovdje od interesa rastuća, to ujedno znači i da je temperatura niža. Prema tome, zamjena sadašnje atmosfere potpuno ugljično–dioksidnom atmosferom snizila bi temperaturu.

Uz ovu kvalitativnu procjenu, pogledajmo i kvantitativnu. Uzmimo npr. temperaturu na visini $h = 1\,300 \text{ m}$. Numeričkim rješavanjem transcendentne jednadžbe (2.55) za dva slučaja, prvi kad desno uvrstimo c_{ef} za sadašnju atmosferu, i drugi kad uvrstimo c_{CO_2} , dobivamo sljedeće:

$$T(h, c = c_{ef}) = 0,9702 T_p = 279,607 \text{ K} \quad (2.56)$$

$$T(h, c = c_{\text{CO}_2}) = 0,9454 T_p = 272,452 \text{ K}, \quad (2.57)$$

odnosno

$$T(h, c = c_{\text{CO}_2}) - T(h, c = c_{ef}) = -7,155 \text{ K}. \quad (2.58)$$

Dakle, ugljično–dioksidna atmosfera bi bila oko 7 stupnjeva hladnija nego sadašnja.

Fizička priča iza ovih brojeva zapravo je vrlo intuitivna. Vrh i dno troposfere imaju različite temperature; dno je toplije. Zagrijavanjem zraka na dnu

taj se zrak počinje podizati, ali kako tlak s visinom opada, on se širi i time hladi (dakle, adijabatski) dolazeći u gornje slojeve. S druge strane, troposfera uravnotežuje grijanje koje upija sa Zemlje tako da taj dio topline izrači zrak koji se podiže kad dođe do stratosfere (jer je ona pogodna za fotokemijske reakcije odnosno za zračenje). Ohlađeni zrak na vrhu troposfere, na granici sa stratosferom, onda počinje padati i opet se, budući da se zbije, adijabatski grije. Stoga je sveukupni učinak izrazito mala ili nikakva promjena temperature. Tako ovaj mehanizam djeluje nasuprot radijativnom grijanju, odnosno djeluje kao stalni hladnjak površine (eng. “*continuous surface cooler*”, jer stalno odvodi toplinu koju izrači u stratosferu) [31, 62, 14, 63].

Prema tome, povećanje radijacije koje se zaista događa povećanjem koncentracije CO₂ jednostavno je presitan učinak u odnosu na dominantnu konvekciju kao glavni mehanizam. Međutim, ovo povlači drugi zaključak: očito je konvekcija u ovakvoj atmosferi izraženija nego u običnoj. A ako imamo veću konvekciju odnosno strujanje zraka, to znači i veću prosječnu sinoptičku aktivnost. Dakle, posljedica povećanja koncentracije CO₂ nije povišenje temperature atmosfere, nego pojačana sinoptička aktivnost atmosfere.

Ipak, u sadašnjoj atmosferi porast ugljičnog dioksida ima dva učinka: jedan je promjena sastava, tj. promjena svojstvenog toplinskog kapaciteta (sniženje jer CO₂ ima niži toplinski kapacitet), a drugi je povišenje ukupnog atmosferskog tlaka. Očito je iz prethodnog razmatranja da ova dva učinka djeluju u suprotnom smjeru. Logaritmiranjem jednadžbe (2.38) imamo

$$\ln \frac{T}{T_p} = \alpha \ln \frac{p}{p_0} \quad (2.59)$$

a deriviranjem ovoga po tlaku (želimo gledati promjenu koju on izaziva) dobivamo

$$dT = \frac{\alpha T}{p} dp + T \ln \frac{p}{p_0} d\alpha. \quad (2.60)$$

Ukoliko gledamo promjenu temperature na površini ($p = p_0$, $T = T_p$), očito ostaje samo prvi član, i imamo $dT_p = \alpha T_p \frac{dp}{p_0}$. Pretpostavimo da se, kako i jesu današnja predviđanja, u idućih sto godina udvostruči koncentracija CO₂ u atmosferi: to će dati $dp = p_{\text{CO}_2} = 0,00046p_0$ (v. tablicu 1.1)

odnosno $dT_p = 0.0253$ K. Drugi učinak, onaj od promjene toplinskog kapaciteta je zanemariv ($\sim -10^{-3}$ K), jer N_2 jednostavno ima preveliku težinu u relaciji (1.1) da bi se išta značajno promijenilo. Odavde slijedi zaključak da je promjena temperature uzrokovana antropogenim porastom koncentracije ugljičnog dioksida neznatna.

Uz ovo, imamo i dodatan argument za prethodni zaključak. Naime, otpuštanje antropogenog CO_2 nužno uključuje proces gorenja (fosilnih goriva) a to znači i nužno vezanje kisika (O_2). No, znamo da je kisik najodgovorniji za grijanje atmosfere radiacijom (v. odjeljak 2.3.3, jednadžbe (2.15) – (2.18)), pa uklanjanje kisika također znači i smanjenje grijanja njime, odnosno hlađenje [63]. I dodatno, uklanjanje kisika također smanjuje tlak u atmosferi, pa je i prethodni učinak time slabiji.

2.3.9 Uzročno–posljedična veza $c(CO_2)$ i T

U dosadašnjem izlaganju teorije pokazano je da povišenje CO_2 ne može uzrokovati povišenje temperature. S druge strane, s eksperimentalnih grafova podataka već je golim okom, a kamo li korelacijskim računom vidljivo da veza nužno postoji. Očito može biti samo u drugom smjeru, tj. da je temperatura uzrok, a promjena koncentracije CO_2 posljedica.

Ključan je čimbenik pritom ravnoteža CO_2 u zraku s onim otopljenim u vodi, tj. u oceanima. Tu ravnotežu daje Henryjev zakon, koji povezuje koncentraciju otopljene tvari u otopini i parcijalni tlak te otopljene tvari iznad otopine:

$$p_{CO_2} = k_H(CO_2)c(CO_2), \quad (2.61)$$

gdje je $c(CO_2)$ koncentracija ugljičnog dioksida u vodi, a $k_H(CO_2)$ Henryjeva stalnica, koja općenito glasi

$$k_H = k_H^0 \exp\left(\frac{\Delta H_{ot}}{RT}\right). \quad (2.62)$$

Ovdje je ΔH_{ot} entalpija otopine, tj. energija potrebna za otopiti mol ugljičnog dioksida u vodi i za otapanje CO_2 ($CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$) iznosi $\Delta H_{ot} =$

$-19,385$ kJ/mol. Budući da je ova vrijednost negativna, to znači da će povećanje temperature povećati i Henriyevu stalnicu (2.62), a to će onda prema (2.61) povećati parcijalni tlak odnosno koncentraciju CO_2 u atmosferi⁴. Dakle, povišenje temperature oceana (koje je uvijek nužna posljedica povišenja temperature atmosfere iznad oceana) kao posljedicu ima smanjenje topivosti CO_2 u vodi tj. povišenje koncentracije CO_2 u atmosferi, pa je zatopljenje uvijek praćeno porastom koncentracije CO_2 , a zahlađenje smanjenjem. Zapravo, ovo je samo jedan od mehanizama kako voda na Zemlji (oceani) zapravo služi kao svojevrsan prigušnik atmosferskih promjena jer bi promjene bile puno oštrije i brže da nema oceana [32].

Zapravo, u fizičkoj intuiciji je puno lakše zamisliti da povišena temperatura otopine uzrokuje veće isparavanje i veći parcijalni tlak otopljene tvari iznad površine, nego suprotno, da povišenje koncentracije otopljene tvari u parama iznad otopine uzrokuje povećano otapanje a ono onda povišenu temperaturu otopine. Kemija se ne obrće tako lako.

Upravo u prilog ovoj interpretaciji ide i analiza Fischera et al. u [22], koji pokazuju da tijekom glavnih prijelaza u ledena doba ili iz njih promjena koncentracije CO_2 ima fazni pomak ("kasni") u odnosu na promjenu temperature, i to u nizu različitih mjerenja. Da budemo točni, citiramo: "koncentracija CO_2 se povećala 80 do 100 ppmv 600 ± 400 godina nakon zagrijavanja pri zadnjim trima deglacijacijama" [22]. Sličan zaključak izvodi se, iako usputno, i u [37].

2.3.10 Kritika adijabatskog modela

Ovaj je model zapravo izrazito intuitivan s fizičkog gledišta: promjena strukture atmosfere jednostavno vodi sustav u novu točku ravnoteže s preraspodjelom relativnih udjela pojedinih procesa, a neto učinak je novi skup vrijednosti parametara sustava, među kojima je i temperatura. To se dobro očitovalo u

⁴Naravno, pri ovom pomaku ravnotežne točke u (2.61) mijenja se i koncentracija CO_2 otopljenog u oceanu, ali kako je ona oko 60 do 90 puta veća nego koncentracija CO_2 u atmosferi [32, 63], ta je promjena neznatna.

odjeljku 2.3.8 gdje smo vidjeli kako promjena jednog parametra sustava vodi na promjenu drugog parametra kako bi se sustav opet uravnotežio.

Ipak, model kao takav ima nekoliko kritika:

1. Model loše ovisi o geometrijskom čimbeniku precesije Zemlje. Sjetimo li se relacije (2.39) odnosno njene inačice (2.40) te definicije $b^\alpha = T_p/T_{\text{ef}}$, vidimo da je ovisnost modela o T_{ef} umjetna: cijeli se grandiozni množitelj u velikim zagradama u (2.40) zapravo pokрати s istim takvim skrivenim u rukom stavljenom b^α . Istini za volju, sama djelotvorna temperatura Zemlje ovisi o ψ i to je dobro modelirano, ali ipak ne uključuje učinak Zemljine nutacije tj. činjenicu da postoje trenutci kad ψ nije ni “prema Suncu” ni “od Sunca” (jedino te mogućnosti model uključuje), nego je ravnina u kojoj je ψ okomita na zraku sa Sunca.
2. Model računa udio vodene pare u prijenosu topline pomoću relacije (2.45), a postulira relaciju za c_r (2.44). Međutim, promjenom koncentracije CO_2 promijenit će se c_p (1.1), premda jako sitno. Ta promjena odmah će utjecati na promjenu c_v u (2.45). No, djelovanje vodene pare (njen toplinski kapacitet) ne mijenja se promjenom koncentracije CO_2 , a djelotvorni toplinski kapacitet za radijativni dio, s druge strane, upravo je onaj koji se usljed ovoga treba mijenjati. Ovako postavljen model zamjenjuje uloge, iako je sve skupa malo značajno zbog malog utjecaja na c_p .
3. Pri procjeni relativnih odnosa prijenosa topline, tj. dolasku iz (2.50) u (2.51), (2.52) i (2.53) implicitno se pretpostavlja da se, ukoliko trenutno zanemarimo preostala dva mehanizma, površinska i djelotvorna temperatura (T_p i T_{ef}) ne mijenjaju. Naime, za sve tri se procjene koristi isti b , i to onaj dobiven u realnoj atmosferi. Stoga ove brojke treba shvatiti upravo kako je kod njih i naglašeno, dakle kao procjene.
4. Slika u kojoj se atmosfera potpuno zamijeni ugljičnom [14, 15] nije primjenjiva na realno povišenje koncentracije CO_2 jer pretpostavlja da

tlak pri toj zamijeni ostaje isti, a tlak realno povišenjem $c(\text{CO}_2)$ raste — što je uzrok povišenja T . To i sam model “priznaje” u relaciji (2.60).

5. Za znati promjenu α u relaciji (2.60) za temperature na bilo kojoj visini, vidjeli smo u (2.36) da trebamo znati promjenu svojstvenog toplinskog kapaciteta. A znati njegovu promjenu znači upravo znati koliko se manje ili više atmosfera grije promjenom koncentracije CO_2 — a to je ono što tražimo! Iako se *naizgled* (!) model sam izborio za rješenje ove cikličnosti jer se povećanje c_p -a u (1.1) nadomjesti oduzimanjem u (2.45) pri zbrajanju svega u c_{ef} u (2.42), jedini spas od kruženja je opet u jako slaboj ovisnosti c_p -a o $c(\text{CO}_2)$. Autori su tu promjenu α procijenili na cca $-4 \cdot 10^{-6}$ [31].
6. Između ostalih, jedan je od glavnih prigovora W. Aeschbach–Hertiga u [1] da relacija (2.61) ne znači povećano otpuštanje CO_2 iz oceana pri zagrijavanju, kako Chillingar i Khilyuk pretpostavljaju [32, 63], nego obratno, da smanjuje njegovo otapanje iz atmosfere, pa mehanizam ne bi bio aktivan nego pasivan, a time i manje izražen.
7. Premda sami autori naglašavaju važnost konvekcije, ipak je nisu uključili u teoriju kao aktivan proces (tok), nego zapravo posredno kao proces adijabatskog grijanja/hlađenja koji je u biti uzrok konvekcije. Stoga bi teorija bila puno tvrđa i potpunija kad bi se uključili i aspekti mehanike fluida i njihove posljedice.

Usprkos ovim kritikama, glavne su posljedice modela više–manje opravdane, a to su (i) najveći relativni udio konvekcije u prijenosu topline u atmosferi, (ii) zanemariv utjecaj povišenja antropogene koncentracije CO_2 na temperaturu i (iii) uzročno posljedična veza promjene temperature i koncentracije CO_2 u kojoj je promjena temperature uzrok, a promjena $c(\text{CO}_2)$ posljedica. Uz već navedene prigovore (1.-7.) formalnom izričaju modela, fizička bit modela vrlo je intuitivna i prihvatljiva. Ovime smo odgovorili na jedno od najtežih pitanja o našim podacima prikazanim u poglavlju 1, a to je veza koncentracije CO_2 i temperature.

Naravno, i sami autori priznaju da je model prejednostavan za objašnjavanje sveukupnih procesa u atmosferi. Naime, prema njima [15], prava bi teorija trebala uključivati (i) razvoj geoloških a atmosferskih uvjeta, (ii) promjene Sunčeva zračenja, (iii) promjene Zemljina precesije, (iv) promjene u oceanima i (v) višestruke sprege oceana i atmosfere. Ovaj model prema tome ne uključuje (v) uopće, a vidjeli smo da je (iii) loše zastupljeno. Ipak, njegov je primarni i uži cilj procjena utjecaja CO_2 , pa shodno tome svi zahtjevi nisu ni uzeti u obzir.

3. POGLAVLJE

Računalna raščlamba Fourierova transformata i značajniji vrhovi

3.1 Diskretni Fourierov transform

Glavni alat korišten u radu je Fourierov transform. Korištena je sljedeća definicija općenitog Fourierova transformata za funkciju $f(t)$:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt; \quad (3.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.2)$$

Međutim, treba nam Fourierov transform nad diskretnom funkcijom odnosno diskretnim skupom podataka — *diskretni Fourierov transform* (DFT). Ukoliko skup ima N članova $(1, 2, \dots, N)$, onda možemo ovako odrediti diskretno vrijeme i frekvenciju:

$$t_k = \sqrt{2\pi} \frac{k-1}{\sqrt{N}}; \quad (3.3)$$

$$\omega_k = \sqrt{2\pi} \frac{k-1}{\sqrt{N}}, \quad (3.4)$$

gdje je $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Početak je brojenja od 1 stvar izbora, a ovdje je tako izabrano čisto da ne bude zabune, jer se u MATLAB-u prvom ele-

mentu polja pridružuje indeks 1. Uz nešto malo računa dolazimo do definicije diskretnog Fourierova transformata koju ćemo koristiti:

$$F(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N f(t_j) e^{-\frac{2\pi i}{N}(k-1)(j-1)}; \quad (3.5)$$

$$f(t_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N F(\omega_j) e^{\frac{2\pi i}{N}(k-1)(j-1)}. \quad (3.6)$$

Ako bismo računali DFT izravno iz prethodne definicije, očito bi trebalo N^2 algebarskih operacija: imamo N puta pojedini $F(\omega_i)$, a svaki zahtijeva sumu N članova. Stoga je razvijen algoritam za brži izračun DFT-a, tzv. brzi Fourierov transformat ili kraće FFT (eng. *Fast Fourier Transform*). U ovom radu ne ulazimo u detalje algoritma, nego koristimo funkciju `fft(X)` programskog paketa MATLAB® [40], koja kao ulazne podatke prima skup (polje) X i kao izlazne podatke vraća njegov FFT u obliku polja. Algoritam za FFT u MATLAB-u je jedan od najboljih algoritama budući da za pojedini korak cjelokupnog FFT-a koristi jedan od poznatih algoritama kojem je upravo taj korak prednost: Cooley-Tukeyev algoritam (CTA), algoritam prostih faktora (eng. *Prime Factor Algorithm*, PFA), algoritam korijenskog rastava (eng. *Split-Radix Algorithm*, SRA) i Raderov algoritam (eng. *Rader's Algorithm*, RA) [21]. Konačan rezultat je da algoritam treba nešto manje od $N \ln N$ algebarskih operacija umjesto N^2 s koliko smo krenuli. Za naš skup od oko $N = 6000$ podataka to znači oko 700 puta brže izvođenje računa.

Uz to, koristimo svojstvo *simetrije* DFT-a u frekvenciji. Naime, uočimo da je

$$\begin{aligned} F(\omega_{N-k+1}) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^N f(t_{j+1}) e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-k)j} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^N f(t_{j+1}) e^{\frac{2\pi i}{N}kj} e^{-2\pi i j} \\ &= F^*(\omega_{k+1}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

gdje smo najprije pomakli nijeme indekse i iskoristili da je $e^{2\pi i j} = 1 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$. Ovo znači da je FFT simetričan s obzirom na frekvencije (točnije, s obzirom

na $\omega_{\max}/2$), pa je pri analizi dovoljno uzeti samo pola domene frekvencija ili perioda i pola podataka iz FFT-a. To prepolavlja broj operacija u svim daljnjim manipulacijama podacima koji su rezultat FFT-a.

3.2 Interpolacija

Prvi problem s kojim se suočavamo u primjeni prethodnog algoritma odnosno funkcija u MATLAB-u jest neravnomjernost naših podataka. Naime, niz podataka grupe EPICA koje koristimo [28] dobiven je izrazito složenom i posrednom metodom, koja stoga ne omogućava ravnomjerno ni izravno određivanje vremenskog niza, nego se uzorci vade iz pojedinih slojeva a onda se mjere pripadne koncentracije i druge geološke značajke, te se iz pripadne kombinacije koncentracija i geoloških parametara u načelu opet posredno ekstrapolira vremeski niz i pripadne temperature. Konačni skup podataka, dakle, ima različitu gustoću ovisno o vremenu: što je sloj bliži sadašnjosti, to se više podataka može o njemu saznati, pa je vremensko uzorkovanje gušće (češće). Ovaj se problem zapravo javlja već prije ulaska u FFT koji također kao ulazne podatke zahtijeva ravnomjerno polje (tj. iste razmake između podataka).

Ovdje smo ga riješili tako što smo nad izvornim podacima napravili interpolaciju koja u vremenski skup podataka doda određeni broj točaka tako da postane ravnomjeran, te mu pridruži vrijednost temperature ili koncentracije CO₂ tako da ne odstupaju od obližnjih pravilnosti u zadanom nizu.

Koristili smo tri osnovne vrste interpolacije: *linearnu*, *krivuljnu* i *Hermiteovu*. Matematičke i numeričke pojedinosti, detalji i značajke svake od njih, kao i elementarna usporedba, dani su u Dodatku B.

Za interpolaciju su korištene tri interpolacijske funkcije u MATLAB-u: `interp1q(t,T,ti)` za linearnu, `spline(t,T,ti)` za krivuljnu i `chip(t,T,ti)` za Hermiteovu, gdje je `t` izvorni niz podataka za vrijeme, `T` izvorni niz podataka za temperature (ili CO₂), a `ti` ravnomjerni vremenski niz između krajnjih točaka izvornoga niza. Budući da ovaj problem stoji prije računa

FFT-a, zapravo moramo odrediti koja je interpolacija najbolja.

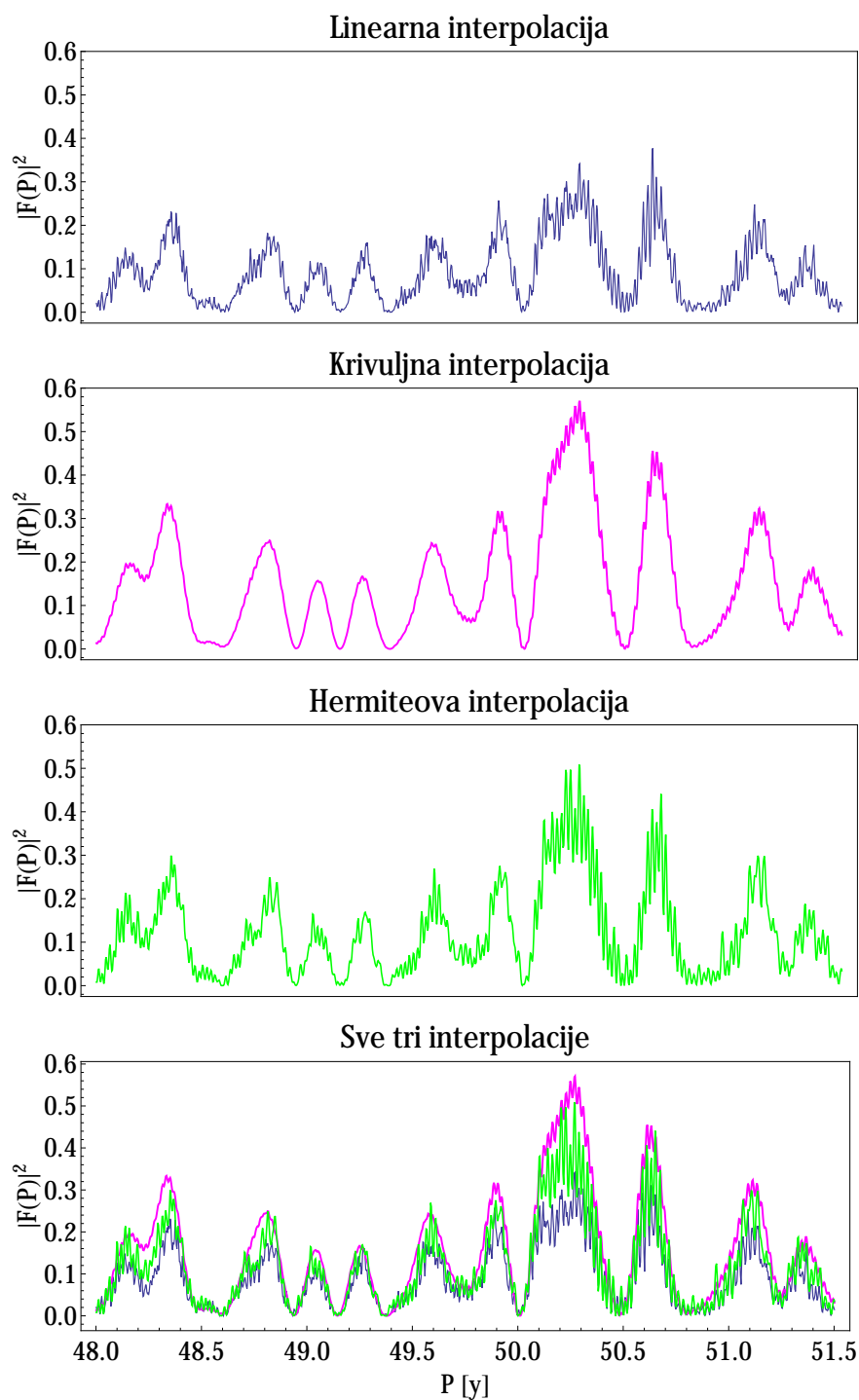
Za svaku od tri interpolacije podataka stoga smo napravili FFT. Ukupna slika FFT-a naočigled izgleda isto za sve tri interpolacije. Zato je uzet manji skup podataka koji će bolje prikazati detalje, konkretno nešto više od 1000 točaka (1136) umjesto svih cca 400 000 (400 812). Za nj je onda napravljena interpolacija i FFT. Rezultate za svaku od tri interpolacije, kao i sve skupa, prikazuje slika 3.1.

Sa slike je očito da linearna interpolacija u našem slučaju daje manje intenzitete nego ostale dvije. Uz to, daje šumljivije (“grublje”) rezultate od krivuljne interpolacije, ali ne i od Hermiteove. Vidimo također da Hermiteova interpolacija daje i šumljivije rezultate i manje intenzitete u odnosu na krivuljnu. Prema tome, ako bismo sastavili svojevrstan poredak, krivuljna bi interpolacija pobijedila po oba parametra (intenzitet i šumljivost), potom bismo izabrali linearnu jer ima manju šumljivost a ne toliko manji intenzitet, i na kraju bi došla Hermiteova. Ovo je jasno sjetimo li se (v. Dodatak B) da je glavna prednost krivuljne interpolacije upravo glatkost, koja se ovdje baš kao takva, bez da je vidimo u izravnom nizu podataka, i odražava: vidimo da je drugi graf najgladi (usp. npr. tri vrha između 48.5 y i 49.5 y na sl. 3.1).

Zaključno, nadalje ćemo kao interpolacijski algoritam koristiti krivuljnu interpolaciju.

3.3 FFT EPICA podataka

Sad smo konačno spremni napraviti FFT EPICA podataka, koji ćemo dalje u radu raščlanjivati. Koristimo podatke s istraživačke postaje Concordia, Dome C na Antarktici u sklopu projekta EPICA (eng. *European Project for Ice Coring in Antarctica*), objavljene u [28]. Projekt EPICA ima još jednu istraživačku postaju Kohnen Station, Dronning Maud Land isto tako na Antarktici, koja je objavila podatke za cca 150 000 godina [56], koji se praktički podudaraju s ovima s prve postaje, koji sežu do cca 800 000 godina. Kasnije ćemo se vratiti i na njih kao i na podatke usporednog istraživanja na



Slika 3.1: FFT izabranog podskupa podataka s različitim interpolacijama.

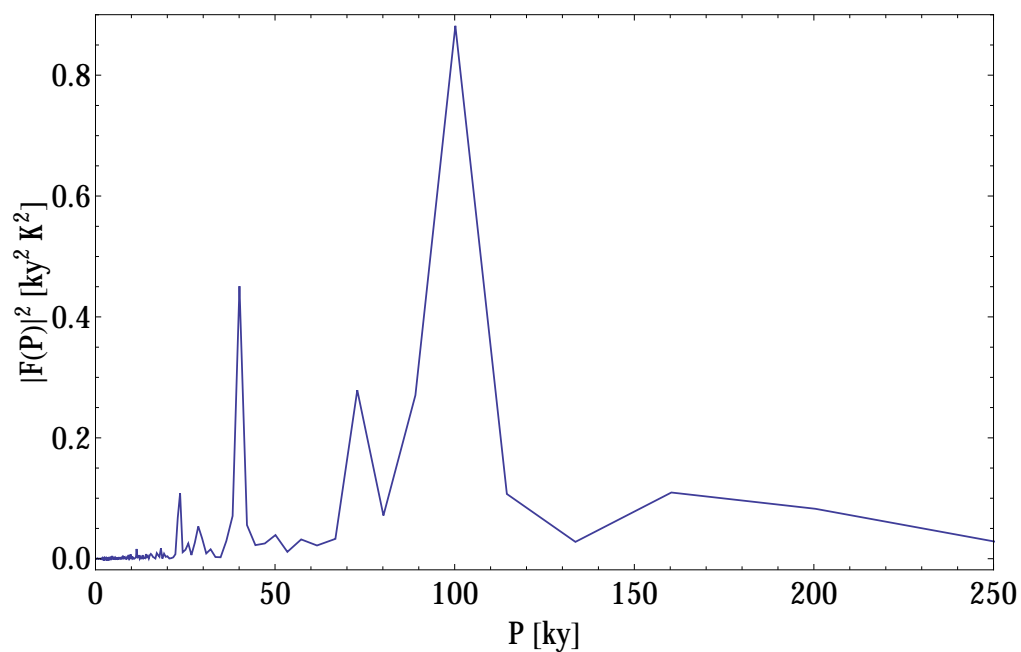
ruskoj postaji Vostok, opet na Antarktici, koji sežu do cca 420 000 godina [53]; za sad koristimo podatke prve postaje jer su dvostruko širi i detaljniji.

Nakon što smo napravili krivuljnu interpolaciju vremenskog niza podataka koristeći funkciju `spline(t,T,ti)` u MATLAB-u, dobivene interpolirane podatke (`Ti`) zadali smo kao ulazne funkciji `fft(Ti)` koja računa FFT kao skup kompleksnih brojeva. Stoga sustavno koristimo kvadrat apsolutne vrijednosti ($|F(\omega)|^2$ odnosno $|F(P)|^2$) i na nj nadalje mislimo kad kažemo “Fourierov transformat” ili FFT.

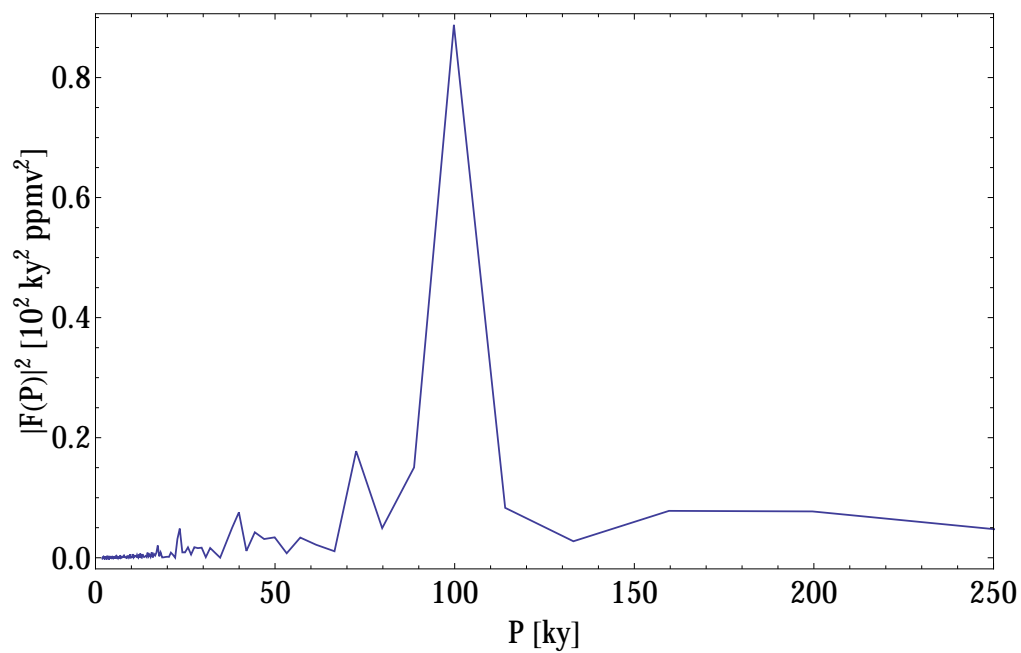
Svi su podatci u radu prikazani nad domenom perioda, a ne frekvencije, tj. umjesto niza ω_i na osi apscisa prikazan je niz $P_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$. Razlog je isključivo intuicija budući da je prirodnije odmah gledati periode određenih pojava na koje ukazuju podatci. Konačno, FFT EPICA podataka za temperaturu je prikazan na slici 3.2(a), dok je FFT EPICA podataka za ugljični dioksid prikazan na slici 3.2(b). Podataka za temperaturu ukupno ima 5 788, dok su podatci za ugljični dioksid dosta rjeđi kako ih ima 1 096. Odmah samim pogledom vidimo izrazitu sličnost ovih dvaju skupova podataka. Ipak, ovdje nećemo ulaziti u detaljniju fizičku raščlambu nego ćemo se na to vratiti kasnije. Ovdje nastavljamo s računalnom obradom ovoga rezultata.

3.4 Izbor značajnijih vrhova u FFT-u

Središnji *računalni* problem kako gotovo cjelokupne znanosti o signalima i o Fourierovoj računalnoj analizi tako i ovog rada jest izdvajanje bitnog dijela ulaznih podataka od nebitnog odnosno prepoznavanje i odvajanje šuma od značajnih podataka. Postoji mnoštvo algoritama za izdvajanje šuma iz periodičnog signala koji se uglavnom temelje na izbacivanju vrijednosti manjih od određenog broja u Fourierovu transformatu te obrnutom Fourierovu transformatu tog “pročišćenog” transformata. Osim što su takvi algoritmi redovito jako osjetljivi na tu graničnu vrijednost koja određuje što će se izbaciti, iz nekoliko razloga ti algoritmi nisu izravno primjenjivi na naš problem, koji stoga zahtijeva razvijanje posebnog algoritma za izdvajanje važnijih vrhova



(a) FFT za temperaturu.



(b) FFT za ugljični dioksid.

Slika 3.2: FFT EPICA podataka za temperaturu i ugljični dioksid.

u Fourierovu transformatu.

Zapravo je najznačajniji problem što je klasično izbacivanje šuma rezanjem svega ispod nekog graničnog intenziteta u Fourierovu transformatu zapravo *statično*, statičan algoritam koji se stoga ne može prilagoditi dodatnim složenostima pojedinih podskupova u skupu podataka. A naš je skup podataka — dobiveni FFT — i te kako složen, budući da nema ravnomjernu gustoću, niti je ravnomjeran u intenzitetima, pa mu ni pripadni šum nije ravnomjeran, kao ni širine vrhova kao posljedica prvoga.

Stoga smo ovdje razvili algoritam koji će koristiti “prozore” i unutar svakog prozora ispitivati relativne odnose točaka. Ovdje “prozor širine $2s$ u točki t_i “, označimo ga s W_i^s , definiramo kao skup podataka

$$W_i^s \equiv \{\Delta T_{i-s}, \Delta T_{i-s+1}, \dots, \Delta T_{i-1}, \Delta T_i, \Delta T_{i+1}, \dots, \Delta T_{i+s-1}, \Delta T_{i+s}\}, \quad (3.8)$$

gdje je $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, a N je ukupni broj podataka (točaka). Svaki prozor W_i^s koji očito ima $2s + 1$ točaka, izuzev početka ($i < s + 1$) i kraja ($i > N - s$) podataka, gdje W_i^s definiramo tako da ne brojimo od $i - s$ odnosno do $i + s$ nego od 1 odnosno do N za početak odnosno kraj, pa je širina prozora zapravo $i + s$ ako smo na početku odnosno $s + N - i + 1$ ako smo na kraju. U programerskom smislu krajevi su zapravo posebna priča, koja u konačnici zauzima veći dio koda premda za samu analizu ne znači puno.

Ovaj se prozor pri analizi pomiče od točke do točke i u svakom takvom koraku provodi svoj unutarnji algoritam koji onda odlučuje je li možda nešto značajan vrh ili ne. Prema tome, prozor se ne pomiče za svoju širinu, nego za jednu točku, pa se u svakoj točki preklapa s gotovo cijelim prethodnim (eng. *overlapping windows*). U sklopu ovog rada razvijena su tri različita algoritma za tri različita kriterija izbora značajnog vrha, koja ćemo podrobnije opisati: *DEF_eM*, *DEFMA_eM*, i *DED_uFeM*. Nazivi su izvorni.

Bitno unaprjeđenje algoritama iznesenih ovdje, kako ćemo vidjeti, sastoji se u tome da se prozor širi ovisno o potrebi odnosno ovisno o kriteriju izbora. Dva algoritma uvode uz osnovni još jedan pomoćni prozor, što je nužno za

uzimanje u obzir nekih složenijih učinaka, npr. debelog vrha koji u sebi sadrži nekoliko manjih podvrhova i sl.

3.4.1 DEFEM

Prvi je i najjednostavniji algoritam DEFEM¹. Ovo je zapravo elementaran i krajnje jednostavan algoritam. Sastoji se od funkcije koja za svaku točku t_i uzme pripadni prozor W_i^s širine s prije i poslije točke, te nađe srednju vrijednost točaka u prozoru:

$$\langle W_i^s \rangle = \frac{1}{2s+1} \sum_{j=i-s}^{i+s} \Delta T_j. \quad (3.9)$$

Ukoliko je vrijednost u toj točki ($\Delta T_i = \Delta T(t_i)$) za određeni postotak veća od prosjeka $\langle W_i^s \rangle$, ta se točka proglašava važnom i izdvaja u poseban skup. Naposljetku se iz svakog vrha šireg od 1 izdvoji samo njegov maksimum kao vrijednost koja ga označava. Pseudokod programa mogli bismo ovako predstaviti:

```

uzmi  $y$ ,  $s$ , postotak
napravi polje važni
za svaku točku u  $y$ :
    definiraj  $W_i^s$ 
    nađi  $\langle W_i^s \rangle$ 
    ako je  $\langle W_i^s \rangle \leq y_i \cdot \text{postotak}$ 
        upiši  $y_i$  u polje važni
za svaku točku u važni:
    ako ima susjednu koja ima manju vrijednost
        zadaj vrijednost susjedne 0
upiši u izlazno polje samo preostale točke u važni.
```

Prema tome, uz ulazne podatke koji su niz brojeva (npr. temperatura), kao parametri se zadaju: (i) *postotak* za koji vrijednost mora biti veća od

¹Lat. *Data Excludenda Fenestras Mediocri* – izlučivanje podataka pomoću srednje vrijednosti u prozoru.

prosječne da bi se izdvojila, te (ii) *širina prozora* u kojem se oko svake točke usrednjava.

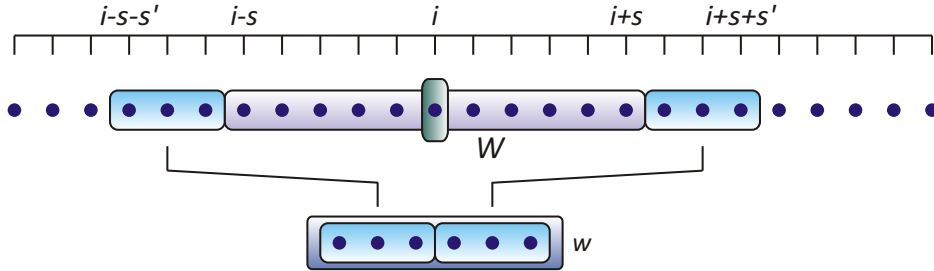
3.4.2 DEFMAFeM

Prethodni je algoritam prejednostavan utoliko što su naši podatci izrazito složeni, pa je i njihov FT složen. Vrhovi u njemu koje želimo izdvojiti nisu kontinuirane tvorevine, nego često u sebi znaju imati nekoliko varijacija, čak i više manjih vrhova i sl. Uz to postoje i jako široki vrhovi koji možda imaju veću širinu čak i od s , pa za njih prethodno isto neće raditi.

Stoga je u složenijem algoritmu DEFMAFeM² uveden još jedan prozor širine s' , označimo ga s $w_i^{s'}$:

$$w_i^{s'} \equiv \{\Delta T_{i-s-s'}, \dots, \Delta T_{i-s-1}, \Delta T_{i+s+1}, \dots, \Delta T_{i+s+s'}\} \quad (3.10)$$

prema shemi prikazanoj na sl. 3.3. Premda ga zovemo “prozor” (u jednini),



Slika 3.3: Shema uzorkovanja podataka dvama prozorima u modulu DEFMAFeM.

vidimo da je zapravo sastavljen od dvije razdvojene polovice: od jedne koja dolazi prije $i - s$ i od jedne koja dolazi nakon $i + s$, obje široke s' .

Ovaj algoritam radi sljedeće: za svaku točku t_i uzme prozor $w_i^{s'}$ i nađe maksimum u njemu, i ukoliko je maksimum u $w_i^{s'}$ nalazi na položaju susjednom $i \pm s$, dakle na položaju $i \pm s \pm 1$ ili $i \pm s \pm 2$ ³, to upućuje na to

²Lat. *Data Excludenda Fenestrae Mediocri et Alteris Fenestrae Maximo* – izlučivanje podataka pomoću srednje vrijednosti u prozoru i maksimuma u drugom prozoru.

³Primijetiti da ovaj drugi položaj zapravo nije prvi susjed, nego ćemo mi proizvoljno uzeti da susjed znači i “dva mjesta udaljen”.

da se radi o širem vrhu, pa se prozor W_i^s širi dokle god prethodno vrijedi; potom uspoređi srednju vrijednost prozora $w_i^{s'}$ (definiranu analogno (3.9)) i maksimum prozora W_i^s : ukoliko je maksimum u W_i^s za određeni postotak veći od srednje vrijednosti u $w_i^{s'}$, ta se točka proglašava važnom i izdvaja u poseban skup. Naposljetku se iz svakog vrha šireg od 1 izdvoji samo njegov maksimum kao vrijednost koja ga označava. Pseudokod programa mogli bismo ovako predstaviti:

```

uzmi  $y, s, s', \text{postotak}$ 
napravi polje važni
za svaku točku u  $y$ :
    definiraj  $W_i^s, w_i^{s'}$ 
    nađi  $\max(w_i^{s'})$ 
    ako je  $\max(w_i^{s'})$  na položaju susjednu rubu  $W_i^s$ 
        proširuj  $W_i^s$  dok god to vrijedi
    nađi  $\langle w_i^{s'} \rangle$  i  $\max(W_i^s)$ 
    ako je  $\langle w_i^{s'} \rangle \leq \max(W_i^s) \cdot \text{postotak}$ 
        upiši  $y_i$  u polje važni
za svaku točku u važni:
    ako ima susjednu koja ima manju vrijednost
        zadaj vrijednost susjedne 0
upiši u izlazno polje samo preostale točke u važni.

```

Kao parametri se ovdje zadaju: (i) *postotak* za koji vrijednost mora biti veća od prosječne da bi se izdvojila, (ii) *širina prozora* s i (iii) *širina prozora* s' . Konačan je učinak npr. da se više točaka u istom širokom vrhu ne proglašava značajnima, što je mana prethodnog algoritma.

Napomenimo da se praktično radi tako da se uzme početno $s = 0$ i gdje god bude potrebe algoritam će ga sam proširiti onoliko koliko je potrebno. Upravo se zbog ovoga ovaj algoritam uz zadano $s = 0$ ne svodi na DEFEM, premda se na prvi pogled može tako pomisliti.

3.4.3 DEDuFeM

Ovaj algoritam zapravo ima istu logiku kao i prethodni, samo se za nijansu razlikuje u kriteriju izbora važnog vrha odnosno usporedbe. Naime, ovdje opet uzimamo dva prozora (W_i^s i $w_i^{s'}$) potpuno analogno prethodnome (sl. 3.3) i opet širimo W_i^s za svaki t_i dok god je to potrebno, ali na kraju ne uspoređujemo prosjek unutar $w_i^{s'}$ nego njegov maksimum nakon proširenja, tj. kao uvjet da bi neki vrh bio značajan stavimo da mora biti viši od svih vrhova u $w_i^{s'}$, što je očigledno stroži uvjet od prethodnog koji je za to koristio srednju vrijednost $\langle w_i^{s'} \rangle$. Zato se i zove DEDuFeM⁴.

Pseudokod stoga izgleda gotovo isto kao prethodni, uz jedinu razliku da umjesto dvaju redova

```

    nađi  $\langle w_i^{s'} \rangle$  i  $\max(W_i^s)$ 
    ako je  $\langle w_i^{s'} \rangle \leq \max(W_i^s) \cdot \text{postotak}$ 

```

sada stoji

```

    nađi  $\max(w_i^{s'})$  i  $\max(W_i^s)$ 
    ako je  $\max(w_i^{s'}) \leq \max(W_i^s) \cdot \text{postotak}$ .

```

Ovaj algoritam ima iste ulazne parametre kao prethodni, ali kako rekosmo ima nešto stroži uvjet, pa će u načelu davati manje značajnih maksimuma.

3.4.4 Cjelokupna integracija programa — DatEx

Konačno, sva su tri algoritma stavljena u zajedničku aplikaciju, koja radi u Windows[®] okruženju i izrazito je jednostavna za koristiti (eng. *user friendly*). Naravno, primjenjiva je na bilo koji skup podataka, ali mi smo sve redom prethodno radi boljeg osjećaja koristili vrijeme i temperaturu budući da se program za to koristi u ovom radu, uz analizu za CO₂ i temperaturu. Da se simbolički naznači ova općenitost, u gornjim je pseudokodovima namjerno stavljano y umjesto ΔT za ulazne podatke.

⁴Lat. *Data Excludenda Duae Fenestrae Maximis* – izlučivanje podataka pomoću maksimuma u dvama prozorima.

Uz prethodna tri modula, u konačnoj je integraciji dodan i modul koji kao izlazne podatke vraća FT bez izlučivanja značajnih vrhova, dakle bez primjene ijednog od tri algoritma. Taj se modul zove FT (**F**ourierov **T**ransformat). Ovdje još donosimo izvadak iz koda koji se odnosi na računanje Fourierova transformata, budući da je to najvažniji korak koji program radi:

```
ti = (min(t):1:max(t))';  
Ti = spline(t,T,ti);  
n = length(Ti);  
g = floor(n/2);  
f = (1:g)./n;  
P = 1./f;  
FT = fft(Ti)/sqrt(n);  
FT(1) = [];  
FT = abs(FT(1:og)).^2; .
```

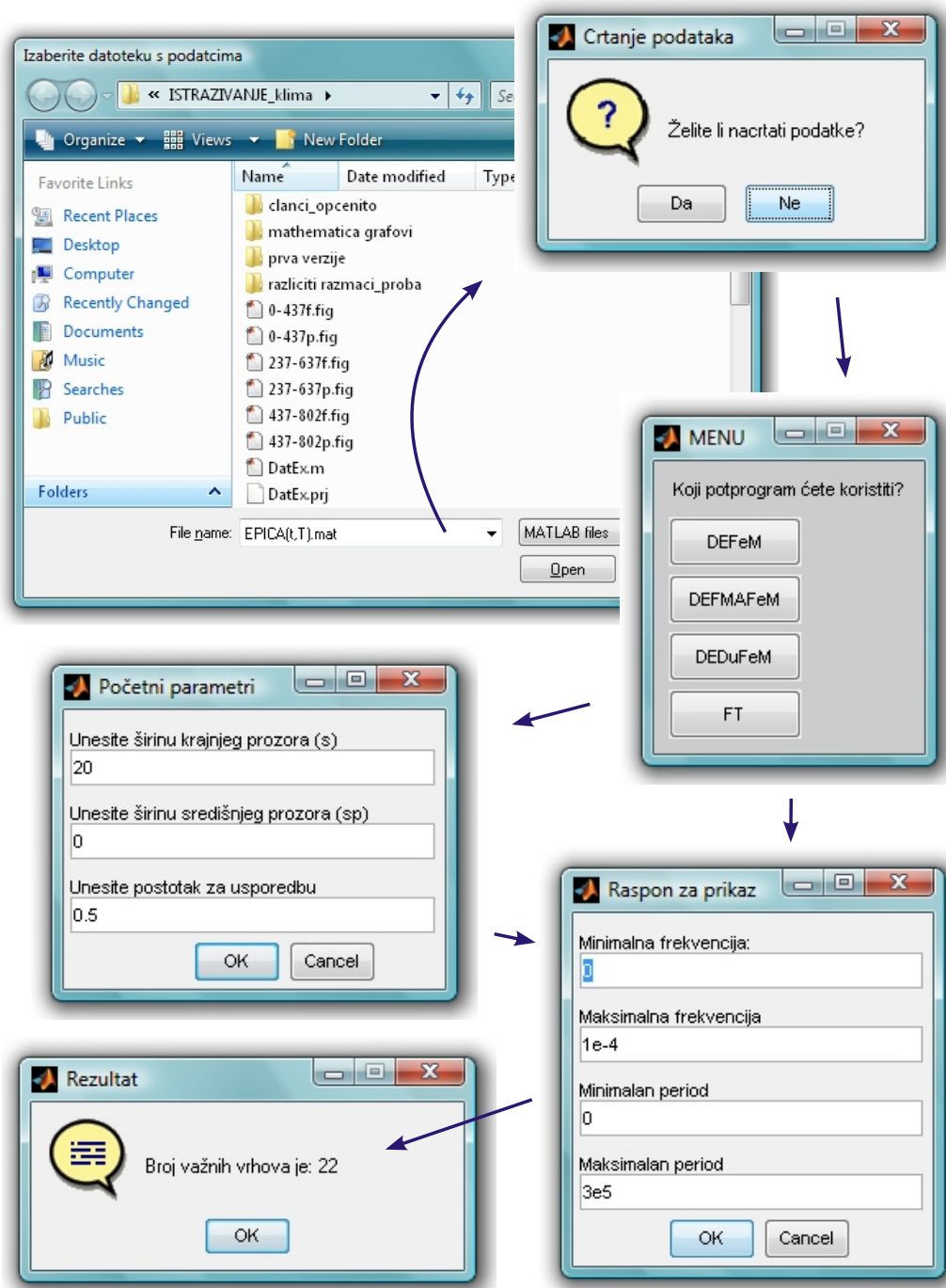
Na prvi pogled bi se reklo da je ovo nevjerojatno kratak kod za ovaj posao — ukupno 9 crta! Međutim, tu je i drugi razlog donošenja ovog koda ovdje, a to je da ukažemo i zašto smo izabrali MATLAB za cjelokupnu analizu i zašto smo sve pisali u MATLABU pa onda na kraju preveli u C++, umjesto da smo, što bi se činilo logičnije, odmah pisali u C++-u ako smo već odredili na kraju prevoditi u nj.

Konačan smo program nazvali onim što i radi – DatEx⁵. Program je, kao što smo rekli, napisan u MATLAB-u i onda preveden u samostalni *.exe-program pomoću prevoditelja Microsoft® Visual Studio® C++ 2008 [41]. S korisnikom komunicira putem grafičkog sučelja prikazanog na slici 3.4. Korake prikazane na slici možemo ukratko opisati ovako:

1. upit za unos podataka koji se žele analizirati: podatci u *.txt, *.dat ili *.bin-obliku u dva stupca;
2. izbornik za crtanje podataka: želi li se same podatke nacrtati ili ne;

⁵Lat. *Data Excludenda* – izlučivanje podataka.

3. Računalna raščlamba FT i značajniji vrhovi 3.4. Izbor značajnijih vrhova u FFT-u



Slika 3.4: Niz prozora grafičkog sučelja programa DatEx, napravljenog u sklopu ovog diplomskog rada. Nisu prikazani prozori koji upozoravaju na pogreške ako do njih dođe.

3. izbornik modula/algoritma kojeg će se koristiti za izlučivanje značajnijih vrhova; FT ne izlučuje značajne vrhove;
4. unos početnih parametara ovisno o modulu: modul DEFEM traži unos s i postotka, moduli DEFMAFeM i DEDuFeM traže unos s , s' i postotka, dok modul FT ne traži unos nikakvih početnih parametara;
5. unos raspona frekvencija i perioda koji se želi nacrtati (FFT-os se automatski postavlja na raspon koji odgovara zadanom rasponu na apscisama);
6. ispis broja značajnih vrhova koji su analizom izdvojeni;
7. zapis Fourierova transformata i izdvojenih vrhova u dvije zasebne *.txt-datoteke: FFT.txt odnosno exFFT.txt (korak nema grafički prikaz na sl. 3.4).

Program ukupno ima 508 crta koda, gdje nisu uračunate linije koda za programiranje samog grafičkog sučelja tj. prozora na sl. 3.4, budući da su za samu implemtaciju prozora korištene MATLAB funkcije za to: `uigetfile()`, `errorldlg()`, `questdlg()`, `menu()`, `inputdlg()` i `figure()`. Vrijeme izvršavanja ovisi o zadanim parametrima, količini ulaznih podataka, brzini procesora računala, izboru modula i sl.

Ipak, dat ćemo procjenu da se stekne osjećaj: na 32-bitnom računalu s dvostrukom jezgrom, brzinom procesora 1.73 GHz i radnom memorijom 2,5 GB za EPICA podatke (~ 6000 izvornih točaka, $\sim 800\,000$ interpoliranih ulaznih podataka) tj. za naš problem, vrijeme izvođenja je cca 15 sekundi za sam FFT (uračunato vrijeme potrebno za komunikaciju korisnika i programa) odnosno 30 do 50 sekundi ukoliko se koristi jedan od tri modula za izbor značajnih vrhova. Što je jednostavniji modul, naravno, treba manje vremena za izvršavanje.

3.5 Crna kutija i važni vrhovi

Zaključno, budući da su ovdje izneseni svi detalji u vezi programa i njegovih modula te komentirane njegove mogućnosti, ograničenja i značajke, dalje se u tekstu neće komentirati detalji programa. Dobiveni samostalni (eng. *stand-alone*) program s grafičkim sučeljem koristit ćemo kao *crnu kutiju* koja će nam iz naših podataka dati bitne vrhove u Fourierovu transformatu, odnosno periode oscilacija temperature i koncentracije ugljičnog dioksida na Zemlji kroz vremenski raspon koji podatci sadrže. Ono što se pri tom izbaci smatrat ćemo i nazivati šumom, koji je posljedica bezbrojnih stohastičkih utjecaja na klimu na Zemlji.

Nakon obrazloženja rada programa, koristimo ga za pronalazak i izlučivanje najvažnijih vrhova u FFT-u Zemljine klimatske povijesti. Ovdje ćemo ispisati sve bitnije vrhove u temperaturi jer je temperaturni zapis gušći u podacima i jači u intenzitetu — v. npr. sl. 3.2(a) i koristeći EPICA podatke [28] jer su najpotpuniji do sad objavljeni i sežu najdulje u prošlost. Zbog izrazite složenosti podataka, razlomili smo dobiveni skup podataka za FFT na više različitih dijelova i analizirali ih programom DatEx u onom modulu koji je najprimjereniji. Tako je za konačan skup vrhova koji su istaknutiji praktički korištena složena kombinacija nekoliko desetaka analiza u različitim modulima, da bi se i formalno mogao pojedini vrh izolirati kao važan bez obzira što se i s grafa na sl. 3.2(a) neki odmah vide.

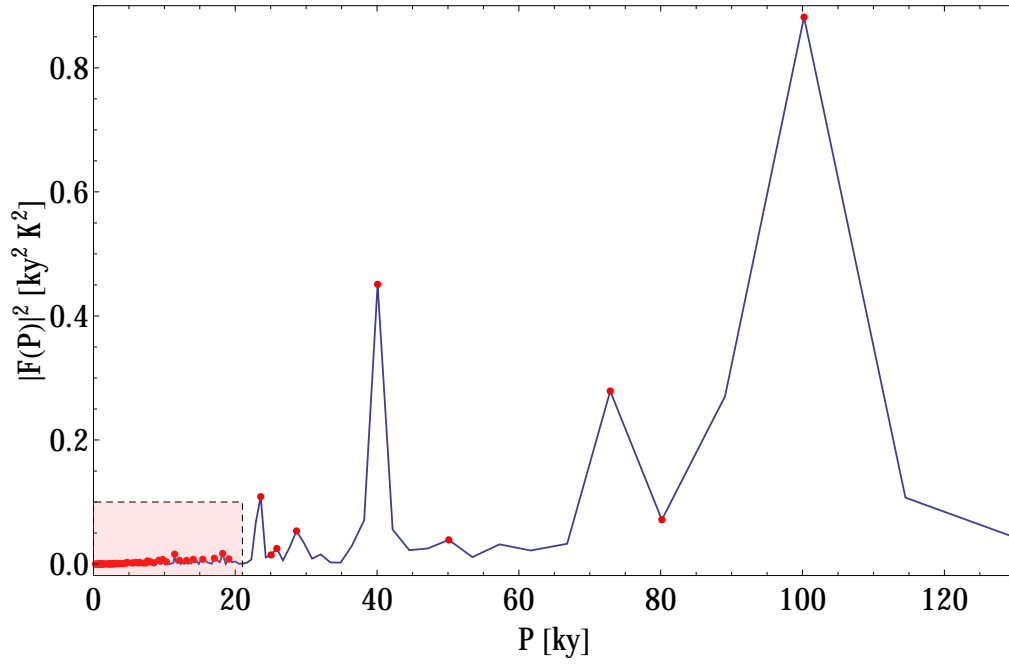
Tablica 3.1: Bitni vrhovi u FFT-u EPICA podataka za temperaturu — najvažniji periodi u klimatskoj prošlosti Zemlje. Intenzitet je u jedinicama $10^{-3} \text{ ky}^2 \text{ K}^2$.

P [ky]	$ F(P) ^2$	P [ky]	$ F(P) ^2$
100,20	881,71	4.31	0.97
80,16	71,36	4.15	0.67
72,87	278,88	3.75	0.86
40,08	451,01	3.52	0.69

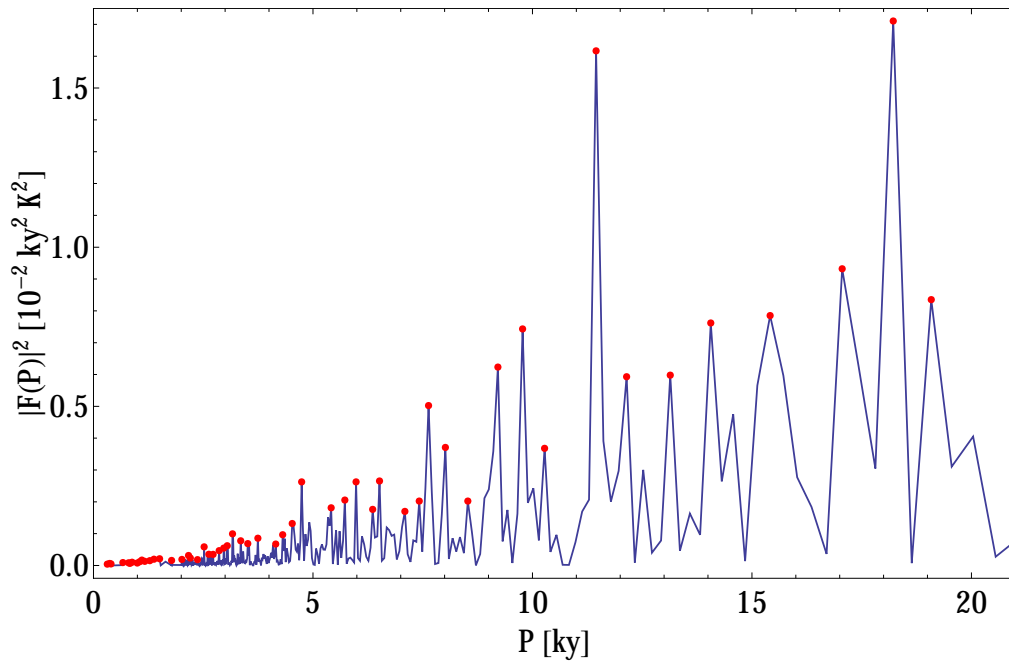
Nastavlja se na idućoj stranici. . .

Tablica 3.1 – nastavak

P [ky]	$ F(P) ^2$	P [ky]	$ F(P) ^2$
28,63	53,38	3.35	0.77
25,86	25,16	3.17	0.99
25,05	14,83	3.05	0.62
23,58	108,65	2.97	0.55
19,09	8,35	2.86	0.47
18,22	17,11	2.73	0.35
17,06	9,32	2.63	0.35
15,42	7,85	2.52	0.59
14,06	7,62	2.37	0.19
13,14	5,98	2.21	0.23
12,15	5,93	2.17	0.31
11,45	16,17	2.01	0.19
10,28	3,68	1.78	0.16
9,78	7,43	1.51	0.21
9,21	6,23	1.38	0.20
8,53	2,02	1.28	0.15
8,02	3,71	1.17	0.13
7,63	5,02	1.10	0.17
7,42	2,02	1.06	0.12
7,09	1,70	1.00	0.08
6,52	2,66	0.88	0.10
6,36	1,76	0.83	0.07
5,98	2,62	0.80	0.08
5,73	2,06	0.67	0.09
5,42	1,81	0.40	0.05
4,74	2,63	0.37	0.06
4,53	1,32	0.32	0.04



(a) Bitni vrhovi u FFT-u za temperaturu.



(b) Uvećani označeni isječak s (a) dijela slike.

Slika 3.5: Bitni vrhovi u FFT-u EPICA podataka za temperaturu (crvene točke) zajedno s cijelim FFT-om (puna plava crta).

Podatci iz tablice grafički su prikazani na sl. 3.5, zajedno s izvornim FFT-om bez izdvajanja bitnih vrhova. Na slici 3.5(b) prikazan je isječak označen pravokutnikom na slici 3.5(a), da približimo i te podatke koji su na gornjoj slici presitni.

Uz to, na slici 3.5(a) očito je da točka na periodu od približno 80 ky nije vrh (grafički); međutim, u idućem ćemo poglavlju vidjeti da ta točka jest fizički vrh, a na grafu nije tako predstavljena jer između nje i vrha na ~ 100 ky s jedne strane te vrha na ~ 72 ky s druge strane nema nijedne točke, pa je automatski spojena s njima. Zato smo je “rukom” dodali kao važan vrh, iako ju je nemoguće programski dobiti kao vrh. Ona je jedini izuzetak između svih točaka u tablici 3.1.

Sa same slike je očita kvaliteta izbora bitnih vrhova koja je, napominjemo, uvjetovana usporedbom svakog vrha ne s apsolutnim prosjekom ili najvećom visinom, nego s njegovom pripadnom okolinom. Zato podatci u tablici 3.1 sežu kroz nekoliko redova veličine.

Valja napomenuti opću značajku FFT-a, a to je da su podatci sve gušći i šumljiviji kako se periodi smanjuju odnosno frekvencije povećavaju. To se jasno vidi na sl. 3.5(a), a još jasnije na sl. 3.5(b). Prema tome, na kratkim periodima bi zapravo trebalo biti puno više vrhova nego smo u tablici 3.1 ispisali. U tablici su doneseni samo najvažniji i zbilja najveći i istaknuti vrhovi u području malih perioda (0–2 ky), i to zato što (i) su središnja tema ovog rada dugoročne korelacije u fluktuacijama temperature, tj. vrhovi velikih (tisućljetnih) perioda, a ovi kratki periodi su sporedni i jer (ii) je opće pravilo da, kako smanjujemo period, svakom vrhu pridonosi sve više međudjelovanja i mehanizama koji su sve finiji. Vidjet ćemo koliko je složeno objasniti čak i nekoliko najistaknutijih vrhova, tako da je praktički nemoguće dati jedinstveno fizičko podrijetlo ovih kraćih vrhova. Stoga ćemo u idućem poglavlju raščlaniti samo osnovne i najviše vrhove, koji predstavljaju osnovnu crtu periodičnosti Zemljine klimatske prošlosti.

4. POGLAVLJE

Mehanizmi pojedinih perioda izmjena temperature i koncentracije CO₂

4.1 Milankovićeve teorije

4.1.1 Ozračivanje Zemlje i astronomski parametri

Najprije uočimo nekoliko geometrijskih pravilnosti koje će nam trebati. Shema oznaka prikazana je na sl. 4.1(a). Kosinusov poučak za sferni trokut ZNS (v. npr. [12], str. 170.) glasi

$$\cos \zeta = \sin \vartheta \sin \Delta + \cos \vartheta \cos \Delta \cos \Lambda. \quad (4.1)$$

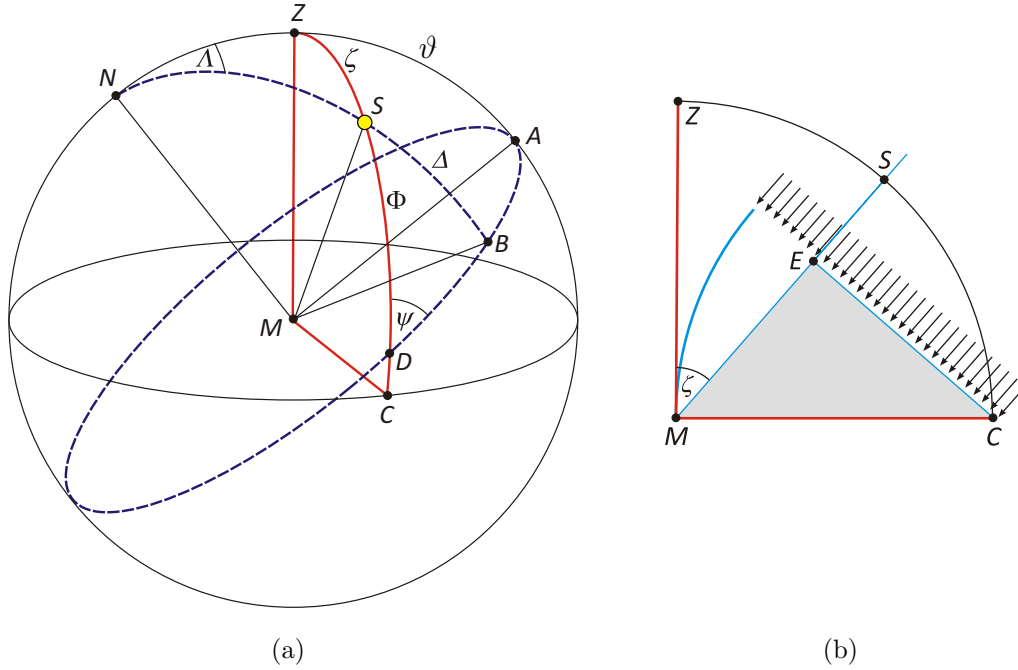
Također, iz sinusova poučka za sferni trokut BDS (v. npr. [12], str. 174.) slijedi

$$\sin \Delta = \sin \psi \sin \Phi. \quad (4.2)$$

Pošto je jakost Sunčeva zračenja na bilo kojoj udaljenosti r dana s

$$I(r) = \frac{a^2}{r^2} I_{\odot} \quad (4.3)$$

jer je količina energije u jedinici vremena jednaka kroz bilo koju sferu, tj. $4\pi a^2 I_{\odot} = 4\pi r^2 I(r)$ (podsjetimo, I_{\odot} je definirano na srednjoj udaljenosti



Slika 4.1: (a) Shema geometrije astronomskih parametara određene točke na Zemlji. Mjesto (M) ima geografsku širinu ϑ ($\sphericalangle AMZ$) i zenit Z na nebeskoj sferi. Sunce (S) ima deklinaciju Δ i ekliptičku polnu koordinatu (longitudinu) Φ . Nebeski ekvator definiran je točkama D , B i A , a meridijan točkama N , S i B . Kut između ekvatorske i ekliptičke ravnine je ψ , a kut upada Sunčevih zraka ζ . Λ je sferni kut $\sphericalangle ZNS$. Ljestvica nije prirodna. (b) Shema upada Sunčevih zraka pod određenim kutom na površinu Zemlje.

a od Zemlje). Od te količine, kako vidimo na shemi 4.1(b), samo je udio $\frac{|\overline{CE}|}{|\overline{CM}|} = \cos \zeta$ površine \overline{CM} zapravo osunčan, pa je količina energije u jedinici vremena

$$\frac{dW}{dt} = \frac{a^2}{r^2} I_{\odot} \cos \zeta = \frac{a^2}{r^2} I_{\odot} (\sin \vartheta \sin \Delta + \cos \vartheta \cos \Delta \cos \Lambda). \quad (4.4)$$

Srednju energiju prenesenu zračenjem na određenu geografsku širinu dobijemo zbrajanjem doprinosa svih geografskih duljina koje su osunčane za danu širinu:

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda_0}^{\Lambda_0} \frac{dW}{dt} d\Lambda = \frac{a^2 I_{\odot}}{\pi r^2} (\Lambda_0 \sin \vartheta \sin \Delta + \cos \vartheta \cos \Delta \sin \Lambda_0), \quad (4.5)$$

gdje su $\pm\Lambda_0$ geografske duljine na kojima zalazi Sunce za danu širinu, tj. nema više osunčanja, odnosno definirane su uvjetom $\frac{dW}{dt} = 0$. Uvrštavanjem tog uvjeta u (4.4) dobivamo graničnu duljinu:

$$\cos \Lambda_0 = -\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \Delta. \quad (4.6)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \arccos(-\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \Delta) \\ &= \frac{\pi}{2} + \arcsin(\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \Delta) \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} (\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \Delta)^{2k+1}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

gdje smo u drugom redu upotrijebili identitet ciklometrijskih funkcija (v. npr. [12], str. 86, §2.8.3), a u trećem razvili funkciju arcsin u red¹ (v. npr. [12], str. 1010). Budući da prema (4.2) vrijedi

$$\operatorname{tg} \Delta = \sqrt{\frac{\sin^2 \Delta}{1 - \sin^2 \Delta}} = \sin \psi \sin \Phi (1 - \sin^2 \psi \sin^2 \Phi)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.8)$$

imamo vraćanjem u (4.7):

$$\begin{aligned} \Lambda_0 \sin \Delta &= \sin \psi \sin \Phi \left(\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} (\operatorname{tg} \vartheta \sin \psi \sin \Phi)^{2k+1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (1 - \sin^2 \psi \sin^2 \Phi)^{-\frac{2k+1}{2}} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \sin \psi \sin \Phi + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)! \operatorname{tg}^{2k+1} \vartheta}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} (\sin \psi \sin \Phi)^{2k+2} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\frac{2k+1}{2}}{l} (\sin \psi \sin \Phi)^{2l} \\ &= \frac{\pi}{2} \sin \psi \sin \Phi + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2k)! \operatorname{tg}^{2k+1} \vartheta}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} \binom{-\frac{2k+1}{2}}{l} (\sin \psi \sin \Phi)^{2(k+l+1)}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

¹Možemo razviti jer je iz definicije (4.6) jasno vidljivo da je $|\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \Delta| \leq 1$.

pri čemu smo u drugom redu razvili² zagradu $(1 - \sin^2 \psi \sin^2 \Phi)$ po binomnom teoremu³. Drugi je član izraza (4.5):

$$\begin{aligned}
 \cos \Delta \sin \Lambda_0 &\stackrel{(4.6)}{=} \cos \Delta \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \vartheta \operatorname{tg}^2 \Delta} \\
 &= \sqrt{1 - (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta) \sin^2 \Delta} \\
 &\stackrel{(4.2)}{=} \sqrt{1 - (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta) \sin^2 \psi \sin^2 \Phi} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta)^k \sin^{2k} \psi \sin^{2k} \Phi \\
 &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k+1} (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta)^{k+1} \sin^{2k+2} \psi \sin^{2k+2} \Phi \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

U prvom je redu iskorištena definicija (4.6), u drugom sređeno, u trećem iskorišten sinusov poučak (4.2), u četvrtom razvijeno u red kao i maločas, koristeći opet definiciju binomnog koeficijenta (4.10), a u petom je izuzet prvi član i u drugom je pomaknut nijemi indeks.

Grupiranjem izraza (4.9) i (4.11) uz iste potencije faktora $\sin \Phi$ pri uvrštavanju u (4.5) dobit ćemo neke koeficijente, nazovimo ih a_k , koji su upravo izračunati razvojem tih dvaju članova. Prema tome, možemo pisati

$$\Lambda_0 \operatorname{tg} \vartheta \sin \Delta + \cos \Delta \sin \Lambda_0 = 1 + \frac{\pi}{2} \sin \psi \sin \Phi \operatorname{tg} \vartheta + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin^{2(k+1)} \Phi. \quad (4.12)$$

Konačno, možemo iskoristiti identitet

$$\begin{aligned}
 \sin^{2k} \Phi &= \frac{e^{i\Phi} - e^{-i\Phi}}{2i} \\
 &= \frac{1}{2^{2k}(-1)^k} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2k}{l} (-1)^l e^{2i\Phi(k-l)} \\
 &= \frac{1}{2^{2k}(-1)^k} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2k}{l} (-1)^l \cos(2\Phi(k-l)). \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

²Opet, iz (4.2) vidimo da je $|\sin \psi \sin \Phi| \leq 1$ pa možemo razviti.

³Pri tome, jer je zagrada potencirana s $-\frac{2k+1}{2} \in \mathbb{R}$, binomni koeficijent definiramo na realnom skupu:

$$\binom{x}{k} \equiv \frac{x(x-1)(x-2) \cdots (x-k+1)}{k!}, \quad (4.10)$$

gdje je $k \in \mathbb{N}_0$ i po definiciji je $\binom{x}{0} = 1$.

Označavajući umnožak ovih binomnih koeficijenata i a_k s b_k , konačno možemo pisati

$$\begin{aligned} \Lambda_0 \sin \vartheta \sin \Delta + \cos \vartheta \cos \Delta \sin \Lambda_0 &= \\ &= \cos \vartheta (\Lambda_0 \operatorname{tg} \vartheta \sin \Delta + \cos \Delta \sin \Lambda_0) \\ &\stackrel{(4.12)}{=} \frac{\pi}{2} \sin \vartheta \sin \psi \sin \Phi + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos(2k\Phi), \end{aligned} \quad (4.14)$$

odnosno iz (4.5)

$$w = \frac{a^2 I_{\odot}}{\pi r^2} \left(\frac{\pi}{2} \sin \vartheta \sin \psi \sin \Phi + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos(2k\Phi) \right). \quad (4.15)$$

Naposljetku, ovaj izraz vrijedi kad je ispunjen uvjet da se može razvijati u red. Jedini uvjet koji nismo pokazali i koji je preostao jest onaj u razvoju izraza (4.11): da bismo mogli razviti korijen u tom izrazu, mora vrijediti

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta) \sin^2 \psi \leq 1 \quad (4.16)$$

odnosno

$$\sin^2 \psi \leq \cos^2 \vartheta. \quad (4.17)$$

Rješenje je te jednadžbe

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \leq \vartheta \leq \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right), \quad (4.18)$$

tj. naš razvoj vrijedi za tzv. *nepolno područje*, tj. područje koje ne dolazi u stanje duge noći zbog precesije Zemlje. Međutim, primijetimo (osnovnom trigonometrijskom manipulacijom) da se ovaj uvjet preklapa s uvjetom razvoja Λ_0 u (4.7), $|\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \Delta| \leq 1$, što znači da izvan ovih granica drugi član u (4.7) nije ni definiran (što i mora tako biti jer smo u polnom području), tj. $\Lambda_0 = \frac{\pi}{2}$. Vraćanjem u (4.5) za ovaj slučaj, vidimo da je to istovjetno ostavljanju samo prvog člana u (4.15) za polna područja.

Naposljetku, apsolutna količina energije koja padne na određenu geografsku širinu od trenutka t_1 do trenutka t_2 je

$$W = \int_{t_1}^{t_2} w(t) dt = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} w(\Phi) \frac{dt}{d\Phi} d\Phi. \quad (4.19)$$

Iz drugog Keplerova zakona (v. npr. [34]) znamo pak da je

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2\pi}{T_g} \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2}, \quad (4.20)$$

gdje je T_g period ophoda Zemlje oko Sunca, dakle godina, a e ekscentričnost Zemljine orbite. Uvrštavanjem ovoga i (4.15) u (4.19) imamo:

$$\begin{aligned} W &= \frac{I_{\odot} T_g}{2\pi^2 \sqrt{1-e^2}} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \left(\frac{\pi}{2} \sin \vartheta \sin \psi \sin \Phi + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos(2k\Phi) \right) d\Phi \\ &= \frac{I_{\odot} T_g}{2\pi^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\pi}{2} \sin \vartheta \sin \psi (\cos \Phi_1 - \cos \Phi_2) + b_0 (\Phi_2 - \Phi_1) + \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2k} (\sin(2k\Phi_2) - \sin(2k\Phi_1)) \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

dok za polne krajeve imamo

$$\begin{aligned} W &= \frac{I_{\odot} T_g}{4\pi \sqrt{1-e^2}} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \sin \vartheta \sin \psi \sin \Phi d\Phi \\ &= \frac{I_{\odot} T_g}{4\pi \sqrt{1-e^2}} \sin \vartheta \sin \psi (\cos \Phi_1 - \cos \Phi_2). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Jednadžbe (4.21) i (4.22) su središnje jednadžbe Milankovićeve teorije, koje povezuju energiju primljenu na određenoj točki Zemlje (definiranu geografskom širinom ϑ) s astronomskim parametrima (ekscentričnost, precesijski kut, položaj Sunca).

4.1.2 Milankovićeve ciklusi

Iz relacija (4.21) i (4.22) vidimo da Zemljin precesijski kut ψ ulazi izravno kao $\sin \psi$ u izraze za energiju primljenu na Zemlji tijekom određenog vremenskog perioda u kojem Sunce prijeđe kut $\Phi_2 - \Phi_1$. Međutim, način na koji Milanković uvodi [45, 46, 47] preostala dva astronomska parametra u relaciju nije, kako na prvi pogled izgleda, preko člana $\sqrt{1-e^2}$ jer je e reda veličine 10^{-3} , pa je taj član jako blizu jedinici, nego putem duljine ljetne odnosno

zimske polugodine, točnije njihove razlike u duljini, koja ima jak utjecaj na količinu primljene topline pa tako i na temperaturu na Zemlji.

Naime, iz nebeske je mehanike poznato [43, 46] da je duljina polugodine

$$T_{\frac{1}{2}g} = \frac{T_g}{2} \left(1 \pm \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right), \quad (4.23)$$

gdje je gornji predznak (+) za ljetnu polugodinu, donji (−) za zimsku polugodinu, a Π označava kutni položaj perihela Zemljine orbite u odnosu na statični heliocentrični ekliptički koordinatni sustav. U prvoj približbi, Milanković pretpostavlja da se Π i e mogu napisati kao

$$\sin \Pi = A_{\Pi} \sin \frac{2\pi}{T_{\Pi}} \quad (4.24)$$

$$e = e_0 + A_e \sin \left(\frac{2\pi}{T_e} + f_e \right), \quad (4.25)$$

gdje su A_{Π} i A_e stalnice, T_{Π} i T_e periodi titrajnih promjena parametara, f_e fazni pomak za e , a e_0 srednja vrijednost ekscentričnosti.

Ove će relacije dati osnovne periode za $\sin \Pi$ i e , koje je Milanković koristeći tadašnje podatke i uvrštavajući ih u relacije (4.21) i (4.22), za koje je W bilo poznato za sve geografske širine, prilagodio dobivši osnovne periode [46]:

$$T_{\Pi} \approx 21 \text{ ky}, \quad T_e \approx 92 \text{ ky}. \quad (4.26)$$

Međutim, za uočavanje finijih periodičnosti (periodičnosti višega reda) i pribrajanja periodičnosti pojedinih astronomskih parametara, Milanković dosljedno koristi razvoj parametara u Fourierove redove (premda ih on tako ne zove) poznate iz nebeske mehanike (tj. poznati su im koeficijenti), koji se prema običaju pišu ovako [10, 46, 45]:

$$e \sin \Pi = \sum_{i=1}^n N_i \sin(g_i t + \beta_i), \quad (4.27)$$

$$e \cos \Pi = \sum_{i=1}^n N_i \cos(g_i t + \beta_i), \quad (4.28)$$

$$\operatorname{tg} \psi \sin \Xi = \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i \sin(\tilde{g}_i t + \tilde{\beta}_i), \quad (4.29)$$

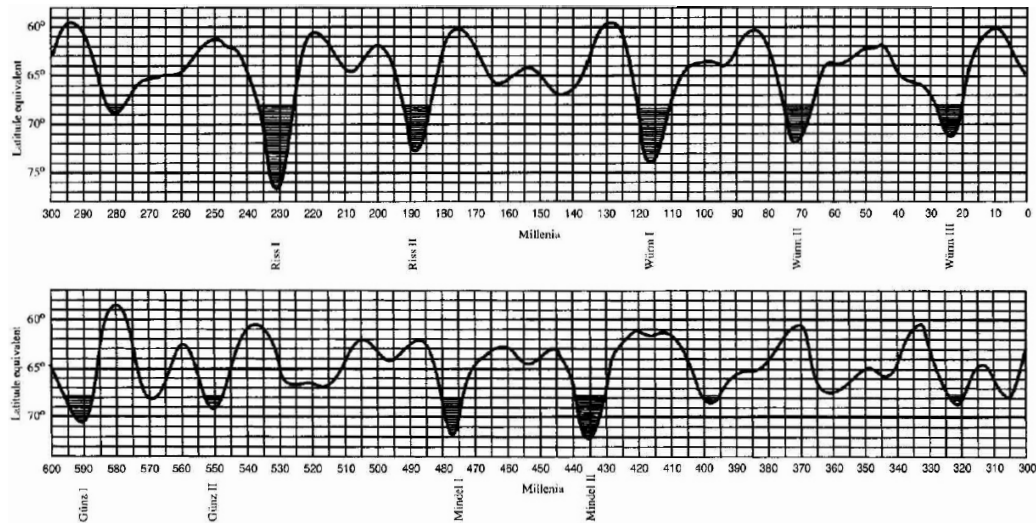
$$\operatorname{tg}\psi \cos \Xi = \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i \cos(\tilde{g}_i t + \tilde{\beta}_i), \quad (4.30)$$

$$\psi = \psi_0 + \sum_{i=1}^n \bar{N}_i \cos(\bar{g}_i t + \bar{\beta}_i). \quad (4.31)$$

Pri tome je n broj planeta koje uzimamo u obzir, stalnice $N_i, \tilde{N}_i, \bar{N}_i, g_i, \tilde{g}_i, \bar{g}_i, \beta_i, \tilde{\beta}_i, \bar{\beta}_i$ i ψ_0 su određene iz početnih uvjeta, a Ξ je kut između x -osi heliocentričnog koordinatnog sustava i linije presjeka Zemljine orbite i ravnine xy tog sustava (jer je Zemljina orbita blago nagnuta prema toj ravnini, i taj se nagib polako mijenja, no o tome kasnije), koji se naziva *longitudom uzlaznog čvora*. Očigledno je da je ovo zapravo skraćeni i harmonijski zapis klasičnog računa smetnje nebeske mehanike koji je preopširan da bi se u nj ovdje ulazilo.

Da bi objasnio promjene temperature u Zemljinoj prošlosti, Milanković uvrštava prethodne izraze (4.27) — (4.31) u izraze za primljenu energiju (4.21) i (4.22) dobivajući prilagodbom ključne periode promjena temperature. Milanković je koristeći podatke dobivene prilagodbom (za koju je koristio eksperimentalne podatke koji su bili djelomično poznati i nekontinuirani) mogao nacrtati teorijsku krivulju promjena zračenja Zemlje tijekom povijesti. Da dočaramo i duh prošlosti, na sl. 4.2 prikazali smo njegovu izvornu krivulju osunčanja Zemlje kroz posljednjih 600 ky dobivenu na temelju jednadžbi (4.21) i (4.22) te ubacujući rezultate nebeske mehanike, maloprije napisane, kao pretpostavku.

Ipak, nama nije prvotni interes ovakva krivulja, premda je zbilja impresivan ovakav teorijski rezultat na čiji značaj ćemo se još vratiti. U središtu nam je zanimanja skup periodičnosti u Zemljinoj klimatskoj prošlosti koje su — kako je Milanković pokazao — izravna posljedica djelovanja svemirskih mehanizama, točnije, oscilatornih promjena astronomskih parametara Zemljina gibanja u Sunčevu sustavu. Što se tiče samo Milankovićeve teorije, prilagodbom (4.27) — (4.31) na pretpostavljenu ovisnost osunčanja koju je izveo, Milanković je dobio nekoliko temeljnih dobro poznatih i, kako ćemo još vidjeti, jasno izraženih perioda. On ih je izveo u nizu svojih publikacija



Slika 4.2: Milankovićeve krivulje ozračivanja Zemlje u zadnjih 600 000 godina, na kojoj je jasno pronašao i poznata ledena doba. Preuzeto iz [38].

[42, 44, 45, 46, 47], a i kasnije su preciznije pokazani [10]. Ovdje su ispisani u tablici 4.1. U nastavku poglavlja još ćemo se vraćati na svakog od njih

Tablica 4.1: Osnovni Milankovićeve ciklusi, s navedenim mehanizmom.

Period ciklusa [ky]	Mehanizam
400	Promjene ekscentričnosti
~100	Promjene ekscentričnosti i dr.
41	Promjene precesijskog kuta
26	Period precesije
21	Promjena položaja perihela

pojedinačno, uspoređujući ih s našim FFT-om. Ovdje valja naglasiti dva detalja.

Prvo, period od 21 ky nastao je kao superpozicija dvaju kružnih gibanja: Zemljine precesije s periodom od 26 ky i rotacije cijele Zemljine orbite (elipse) oko Sunca (žarišta) s periodom od oko 112 ky (gledano u odnosu na statični heliocentrični ekliptički sustav). Međutim, ta se dva gibanja zbrajaju: ro-

tacija Zemljine orbite (tzv. *apsidna precesija*) ide “ususet” precesiji pa se gledano sa Zemlje perihel Zemljine orbite okrene i vrati na isto mjesto za ~ 21 ky. Ovo obrazlažemo kao primjer i uzorak međudjelovanja astronomskih oscilacija: na sličan način se zbrajaju gotovo svi temeljni periodi oscilacija astronomskih parametara tako da imamo cijeli niz mogućih perioda čiji obris možemo vidjeti u klimatskim podacima na Zemlji.

Drugo, premda Milankovićeve teorije govori u jeziku astronomskih parametara, ona prešutno uključuje i djelovanje zemaljskih parametara, glavni od kojih je površina Zemlje pod ledom u određenom povijesnom trenutku. Naime, taj je mehanizam zapravo način odgovora i samostabilizacije Zemlje na promjene izvana, iz svemira, jer bitno utječući na Zemljinu raspodjelu mase utječe primjerice na njenu precesiju i precesijski kut: promjena precesijskog kuta izazvat će promjenu temperature odnosno promjenu granice vječnog leda na Zemlji, a ta promjena pak izaziva promjenu središta mase Zemlje tako da u određenom trenutku zaustavi daljnju promjenu tog kuta i u određenom graničnom slučaju izazove nagli povratak tog kuta na početnu vrijednost. To je samo primjer vezanja zemaljskog i astronomskog oscilatornog mehanizma promjene određenog parametra.

Zaključno, Milankovićeve teorije je povijesno praktički prva takva teorija ledenih doba i klimatskih promjena u prošlosti Zemlje. Točnije, njegova je izvorna zamisao, ali i teorijsko ostvarenje te ideje, da su klimatske promjene na Zemlji prvenstveno posljedica oscilatornih promjena u astronomskim parametrima Zemljina gibanja u svemiru koji se vežu na zemaljske mehanizme promjene bilo tih istih parametara bilo izravno temperature atmosfere i Zemljine površine.

Sad ćemo šire objasniti svaki od pojedinih bitnih perioda uočenih u FFT-u na sl. 3.5 (str. 60), a ispisanih u tablici 3.1 u poglavlju 3 (str. 58). Neki od njih su upravo Milankovićeve ciklusi iz tablice 4.1, neki su dani mehanizmima o kojima Milanković nije raspravljao, a neki su još nepoznati i treba ih objasniti. Period koji ćemo najviše obraditi je onaj od 26 ky, tj. period Zemljine precesije, a razlog je i lijepa fizika problema i da nam posluži kao

uzorak načina razmišljanja o djelovanju ostalih perioda. Naravno, ovaj rad nije predviđen za takvo teorijsko izračunavanje svakog od perioda. Stoga je taj period dat i kao primjer. No krenimo redom.

4.2 Period od $\sim 100\ 000$ godina

4.2.1 Milankovićevo rješenje i “100 ky – problem”

Kao što smo već spomenuli (v. tablicu 4.1), Milankovićeve teorija daje period od 100 000 godina, kojemu je podrijetlo periodična promjena ekscentričnosti Zemljine orbite oko Sunca. U jednadžbama Milankovićeve teorije promjena ekscentričnosti ulazi “najslabije” i njen potpis u klimatskim podacima bi prema teoriji trebao biti najslabiji. Međutim, sa slika 3.2 (str. 49) 3.5 (str. 60) jasno se vidi da je vrh od 100 ky najjači. Ovaj se problem zove “100 ky – problem”. Sličan je i drugi problem koji se također veže na ekscentričnost, tzv. “400 ky – problem”, koji se svodi na istu priču; štoviše, u klimatskom zapisu uopće nema nikakvog vrha na 413 ky (koliko bi Milankovićeve teorija u proširenom izdanju dala [26]), ali ovaj problem ne možemo uzeti ozbiljno jer je skup podataka koji imamo jednostavno nedovoljan da bismo ga vidjeli u FFT-u.

Autori se uglavnom slažu da je Milanković dobro predvidio postojanje perioda ekscentričnosti od 100 ky. Međutim, očigledno je da to jest mehanizam perioda od 100 ky u klimatskom zapisu, ali i da nije jedini. Rješenje problema 100 ky je prema tome pridruživanje potpunog skupa mehanizama ovom periodu, a ne pridruživanje jednog jedinstvenog mehanizma, kako se često navodi, jer je već očito da postoji više od jednog mehanizma.

Dok neki autori tvrde da ipak mogu jasno pridružiti promjenu ekscentričnosti kao glavni mehanizam ovog perioda [58, 30] (Kawamura et al. [30] primjerice smatraju Milankovićevu teoriju potpuno točnom), većina autora s tim se ne slaže. Zanimljivo je rješenje predložio Berger [10]. On je našao 5 različitih periodičnosti astronomskih parametara u blizini vrha od 100 ky,

razvijajući parametre definirane relacijama (4.27) – (4.31), ali dodavši još takav razvoj za derivaciju te frekvencijsku modulaciju precesijskog kuta ψ . Prema njemu, to su periodi od 94,9 ky (kombinacija međudjelovanja Marsa i Jupitera sa Zemljom), 99,6 ky (međudjelovanje Jupitera i Zemlje), 98,0 (međudjelovanje Merkura i Zemlje), 107,5 ky (međudjelovanje Venere i Zemlje) te 97,0 ky (modulacija ψ). Ovaj prijedlog osim djelomičnog objašnjenja visine vrha na 100 ky objašnjava donekle i njegovu širinu u odnosu na druge vrhove.

4.2.2 Promjena ψ kao rješenje

Nekoliko autora [62, 63, 68] predlaže period promjene precesijskog kuta ψ , ali nužno u međudjelovanju (povratnoj sprezi) sa Zemljinim unutrašnjim mehanizmima, kao rješenje 100 ky problema.

Ovo rješenje možemo lako ilustrirati. Naime, potpuno analogno izvodu izraza za brzinu precesije u odlomku (4.7), do kojeg ćemo doći nešto kasnije, možemo praktički istim računom dobiti i promjenu precesijskog kuta odnosno nagiba osi precesije prema ekliptičkoj ravnini. Osnovni izraz za tu promjenu je

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{GM_{\odot}}{d_{\odot}^3 \Omega} \frac{J - I}{J} \cos \psi, \quad (4.32)$$

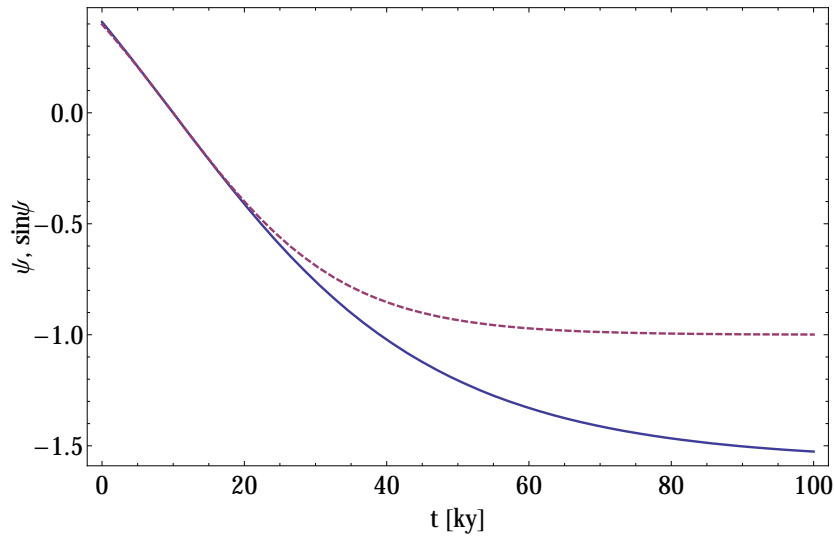
gdje je sve ispred $\cos \psi$ stalnica, definirana u tablici 1.2; označimo je s α (uočimo da je $\alpha > 0$). Finije popravke ovog člana i njegov detaljniji (eng. *straightforward*) izvod je u [68]. Ovo je nelinearna diferencijalna jednadžba prvog reda, koju možemo riješiti integriranjem:

$$\int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\cos \psi} = -\alpha t = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)_{\psi_0}^{\psi}, \quad (4.33)$$

gdje smo rješenje integrala preuzeli iz [12], str. 1036., §325. Odavde je

$$\psi(t) = 2 \operatorname{arctg} \left(e^{-\alpha t} \operatorname{tg} \left(\frac{\psi_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) - \frac{\pi}{2}. \quad (4.34)$$

To je rješenje prikazano na sl. 4.3, na kojoj je prikazan odmah i graf $\sin \psi$ jer



Slika 4.3: Graf funkcije $\psi(t)$ (4.34) (puna plava crta) i $\sin \psi(t)$ (isprekidana ljubičasta crta).

smo vidjeli u relaciji (4.21) i (4.22) da ψ ulazi izravno kao $\sin \psi$ u osunčanje Zemlje. Prema tome će i temperaturni odziv na promjenu ovog parametra u prvoj približbi izgledati isto kao isprekidana crta na sl. 4.3. Prema Sorokhtinu [62, 63, 60], pad temperature sukladan slici 4.3 izazvat će povećanje količine leda, a to povećanje će onda izazvati promjenu položaja središta mase Zemlje, koja promjena stvara suprotan zakretni moment na Zemlju od ovog koji izaziva smanjenje ψ -ja i u određenom graničnom trenutku će se taj moment izjednačiti s prvim, pa će ψ prestati opadati. Štoviše, Sorokhtin predlaže da se tada dogodi nagli skok u ψ , čime bi objasnio i nagli skok u temperaturi prilikom izlaska iz ledenog doba koji se jasno vidi u paleografskim podacima.

4.2.3 Promjena orbitnog nagiba kao rješenje

Zemljina orbitna ravnina malo je nagnuta prema tzv. invarijantnoj ekliptičkoj ravnini (ravnina okomita na zamah Sunčeva sustava) koja se praktički poklapa s Jupiterovom orbitom. Kut nagiba Zemljine orbitne ravnine prema invarijantnoj ravnini mijenja se također periodički, i to s periodom od oko 100 ky. To gibanje Milanković nije razmatrao. Stoga postoji skupina autora [49, 50] koji predlažu promjenu orbitnog nagiba kao mehanizam odgovoran

za period od 100 ky, a istu je kao otvorenu mogućnost ostavio i Berger [10].

Fizički mehanizam koji bi pri tom utjecao na promjenu klime nije promjena osunčanja (kako bi bilo u Milankovićevoj teoriji) nego dovođenje Zemlje, zbog pomjeranja orbite, u područja gušće svemirske prašine koja bi praktički zasjenila Zemlju [49, 33]. Takve su pretpostavke i eksperimentalno potvrđene [20, 33], ali ostaje otvoreno pitanje koliko takav mehanizam može pridonijeti intenzitetu vrha od 100 ky.

4.2.4 Drugi mehanizmi

Postoje i prijedlozi podrijetla perioda od 100 ky koji nisu utemeljeni na promjenama astronomskih parametara Zemlje. Primjerice, autori [24, 57, 55] pridružuju taj period unutrašnjem mehanizmu Zemlje, bilo da se radi o rezonantnoj frekvenciji s tim periodom u unutrašnjosti Zemlje [24, 57] ili o periodima kontinentnih pomaka i razdvajanja oceanskog dna [55].

S druge strane, Ehrlich [19] ovaj vrh pridružuje unutrašnjem mehanizmu Sunca, konkretno pronalazeći period od 100 ky u titrajima difuznih valova u unutrašnjosti Sunca.

Uglavnom, velika pozornost današnje znanosti je usmjerena rješavanju ovoga pitanja. U ovoj grani znanosti to je praktički središnje neriješeno pitanje, što se vidi i prema broju publikacija. Od niza predloženih mehanizama koje smo ovdje ukratko predstavili, ipak su najvjerojatniji promjena ekscentričnosti (Milankovićeva teorija), promjena orbitnog nagiba i promjena precesijskog kuta, koji sami, kao što smo vidjeli primjerice u [10], imaju niz vrhova oko 100 ky, pa se zbrajaju dajući visok i širok vrh od 100 ky u našem paleoklimatskom zapisu.

4.3 Točka na $\sim 81\,000$ godina

Kao što smo komentirali na kraju prethodnog poglavlja (v. str. 61), u obzir ćemo uzeti i ovu točku premda nije grafički prikazana kao vrh na sl. 3.5. Već smo objasnili zašto na str. 61.

Ova točka potječe od Sunčeva doprinosa zakretnom momentu na Zemlju koji izaziva precesiju; to je, dakle, precesijska frekvencija koju Sunce daje Zemlji. Budući da se kasnije u odlomku 4.7 detaljno izvodi i taj i Mjesečev doprinos precesiji, sve što ćemo sad reći je da točka na ~ 81 ky dolazi od prvog, Sunčevog člana ($\frac{M_{\odot}}{a^3_{\odot}}$) u relaciji (4.75) odnosno (4.76) i točno iznosi $\tau = 81,12$ ky, dakle očito jako dobro reproducira našu točku koja prema tablici 3.1 iznosi 80,16 ky. Uz to je i malen intenzitet očekivan jer je Sunčev utjecaj na precesiju, kako ćemo vidjeti, puno manji od Mjesečeva.

4.4 Period od $\sim 72\,000$ godina

Ovaj period ne možemo objasniti u sklopu Milankovićeve teorije onako kako ju je on iznio, ali Berger [8] i Muller [48] su kasnije došli do perioda od ~ 70 ky proširenjem Milankovićeve teorije na promjenu kuta nagiba orbitne ravnine prema invarijantnoj ravnini na potpuno analogan način kako ju je on izveo za svoja tri mehanizma.

Pišući jednadžbe slične (4.27) do (4.31) za taj kut, označen s i (kao inklinacija) i prilagođavajući te jednadžbe poznatim međudjelovanjima pojedinih planeta sa Zemljom te poznatim podacima za osunčanje, Berger je u [8] prvi pretpostavio postojanje takvog perioda kad se još eksperimentalno nije ni vidio, a teorijski nije bio poznat. U tom su radu najizraženiji harmonici za promjenu inklinacije između ostalih i na periodima 68,83 ky i 72,73 ky, koje je zaključno zaokružio na ~ 70 ky. Budući da nije dobivena u Milankovićevoj teoriji, ova se linija (vrh) ponekad zove “anomalna linija”.

Isti je period poslije dobio i Muller [48] koji je pokazao da je ~ 70 ky (kvazi)period jedne precesije tzv. vektora inklinacije, tj. vektora okomita na Zemljinu orbitnu ravninu u sustavu invarijantne ravnine, ali također da je djelotvorni period utjecaja te promjene na Zemljinu klimu otprilike 100 ky. Stoga ovo ističe kao glavni mehanizam perioda od 100 ky, a objašnjava i zašto je vrh na 70 ky manji od njega.

Ipak, vrh od 72 ky malo je poznat u literaturi, a ni neke analize prijašnjih

podataka nisu ga pronašle, kao npr. ona u [53]. Stoga uočavanje ovoga vrha samo po sebi predstavlja novost jer ni u jednom paleografskom zapisu do sad nije bio nađen, premda je teorijski pretpostavljen [8, 48], pa čak ni u analizama ovog EPICA skupa podataka koji je ovdje korišten. U analizi podataka s postaje Vostok taj vrh uopće ne vide [53].

4.5 Period od 40 000 godina

Ovo je jedan od temeljnih Milankovićevih perioda i ne poklapa se točno s Milankovićevim jer mehanizam promjene precesijskog kuta nije potpuno periodičan nego prije kvaziperiodičan, što objašnjava razliku Milankovićeva perioda (41 ky) i našeg iz tablice 3.1 (~ 40 ky) [38]. Ovaj period je zapravo period prvog harmonika u razvoju (4.31) Milankovićeve teorije.

4.6 Period od 28 000 godina

Posebno je zanimljiv period od 28,63 ky u našoj tablici 3.1. Naime, taj period nije viđen ni u jednoj citiranijoj analizi (npr. [28, 53]) nema ga u Milankovićevoj teoriji [38, 42, 44, 45, 46, 47] niti ijednom poznatom njenom proširenju [8, 10, 11, 26, 55, 69]. Dakle, period od ~ 28 ky ne odgovara nijednom osnovnom ili višem harmoniku ijednog astronomskog parametra. A s druge strane, jedan je od 5 najistaknutijih vrhova na sl. 3.5(a). Ovo bismo mogli formulirati kao otvoreno pitanje odnosno “problem 28 ky”, koji u literaturi još ni ne postoji, i ovdje ga (p)ostavljamo otvorenim za riješiti.

Zapravo, postoje dva spomena ovog vrha [7, 36] koji ga ne obrađuju detaljno, nego samo usput predlažu da, budući da je jasno da ne potječe od periodičnosti nekog od astronomskih parametara, nužno potječe ili od mehanizma svojstvenog Zemlji ili od nelinearnog mehanizma odgovora Zemlje (posebno leda) na astronomsko uvjetovanje. Prema tome, period od 28 ky bio bi potpis unutrašnjeg Zemljina mehanizma u međudjelovanju s vanjskim astronomskim mehanizmom [36]. Taj je potpis nužno nelinearan jer ga nema

ni u Milankovićevoj teoriji ni u njenim proširenjima koji su oboje linearne teorije.

Ipak, zgodno je uočiti da period od 28 ky možemo dobiti zbrajanjem osnovnih perioda od 100 ky i od 40 ky. Točnije, možemo uzeti jedan od dva glavna perioda ekscentričnosti, 95 ky [11] i period precesijskog kuta od 40 ky:

$$\omega = \omega_{95\text{ky}} + \omega_{40\text{ky}} = \frac{2\pi}{\tau_1} + \frac{2\pi}{\tau_2} \quad (4.35)$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 28,15 \text{ ky}. \quad (4.36)$$

Prema tome, kombinacija dvaju gibanja, promjene ekscentričnosti i promjene precesijskog kuta, jako dobro može reproducirati ovaj period. Uzmemo li za $\tau_2 = 100$ ky, dobit ćemo 28,56 ky, tj. i sveukupni veliki vrh na 100 ky može reproducirati ovaj vrh, tako da ne možemo sa sigurnošću reći da ga daje kombinacija baš ekscentričnosti s promjenom precesijskog kuta. Ipak, ta ga kombinacija reproducira najvjernije.

Ovo objašnjenje, izvedeno u duhu komentara u odjeljku 4.1.2 koji je jasno pokazao kako se mehanizmi mogu zbrajati, predstavlja novo tumačenje ovog vrha, nepoznato u literaturi isto kao što je i sam vrh praktički nepoznat.

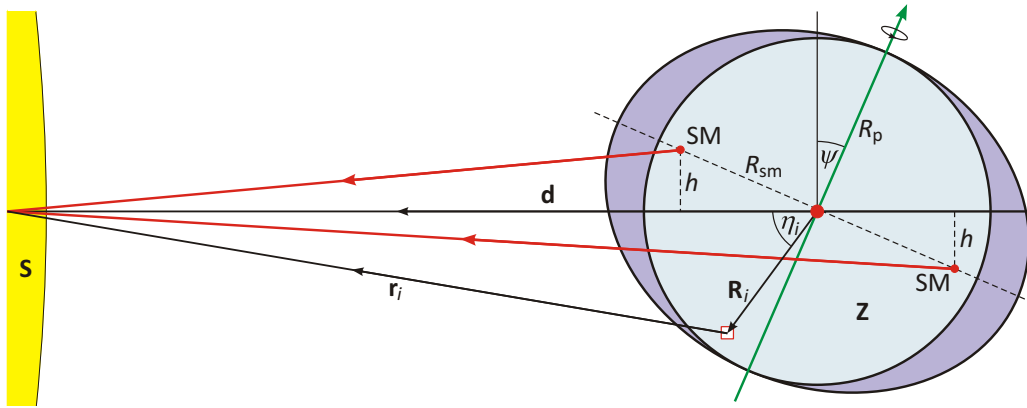
4.7 Period od $\sim 26\,000$ godina

Jedan je od najzanimljivijih perioda koje možemo uočiti u FFT-u na sl. 3.5 i u tablici 3.1 onaj od 26 000 godina. Premda nije izrazito visok, zapravo je jedan od najzanimljivijih jer jako dobro ocrtava posebnosti svemirskog djelovanja na Zemlju, i to posebno na njezinu “neokruglost” odnosno činjenicu da je Zemlja spljoštena. Upravo zato što je jedan od rijetkih “čistih” vrhova (pridružen mu je jedan jedini mehanizam), ima i manji intenzitet, dok drugi vrhovi, budući da imaju više doprinosa, imaju i veći intenzitet. No to je zapravo drugi razlog zašto ćemo ovaj vrh detaljno obraditi: baš zato što je čist, a uz to i zbog toga što ga relativno lako možemo rekonstruirati s jako velikom točnošću: ovaj vrh potječe od perioda Zemljine precesije, koja

ima podrijetlo u tome što, budući da je Zemlja nagnuta prema ekliptičkoj ravnini, gravitacijska sila Sunca na njezino elipsoidno ispupčenje s one strane do Sunca nije jednaka onoj na ispupčenje s druge strane.

4.7.1 Pokušaj procjene prema Sorokhtinu

Jedan pokušaj procjene daju ruski autori u [63]. Ideja je da odvojeno gledamo gravitacijsku silu na onaj dio Zemlje koji odstupa od kugle, kojeg ovdje zovemo ispupčenje, i to na svaku njegovu polovicu odvojeno. To je zapravo razlika elipsoida i njemu upisane kugle. Shema takve geometrije je prikazana na sl. 4.4. Budući da je središte mase samog elipsoidnog poluispupčenja (SM



Slika 4.4: Shema geometrije za procjenu zakretnog momenta na Zemlju. Ljestvica nije prirodna.

na sl. 4.4) zbog nagnutosti Zemljine osi odmaknuto od ekliptičke ravnine (prema gore s jedne strane, prema dolje s druge) za h , a na dva nasuprotna središta mase zbog različite udaljenosti od Sunca djeluju različite gravitacijske sile, konačan će učinak na Zemlju biti zakret. A kako znamo iz klasične mehanike, zakret okomit na vektor kutne brzine zvrka (što je u ovom slučaju Zemlja) daje precesiju zvrka.

Promjena je zamaha⁴ \mathbf{L} krutog tijela usljed djelovanja zakretnog momenta

⁴Zamahom (eng. *angular momentum*) nazivamo vektor $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, gdje je \mathbf{r} vektor položaja, a \mathbf{p} zalet (njem. *Impuls*) tijela. Izbjegavamo naziv “angularni moment”.

\mathbf{N} , gledano iz vanjskog statičnog sustava:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\text{st}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}, \quad (4.37)$$

gdje smo odmah napisali i dobro poznatu (v. npr. [34]) transformaciju u sustav tijela (indeks “st”). $\boldsymbol{\omega}$ je precesijska frekvencija. Ukoliko je u sustavu tijela zamah očuvan, očito je $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}$. Taj je uvjet za Zemlju ispunjen.

Zamah Zemlje lako je naći, jer je $\mathbf{L} = J\boldsymbol{\Omega}$, gdje je J inercijski moment oko Zemljine osi rotacije, a $\boldsymbol{\Omega}$ frekvencija okretanja Zemlje oko svoje osi. Razlika je sile na lijevo i na desno središte mase ispušćenja na sl. 4.4 prema Newtonovu zakonu gravitacije:

$$\begin{aligned} \Delta F_{\odot} &= GM_{\odot}m_{\text{isp}} \left(\frac{1}{(d_{\odot} - R_{\text{sm}} \cos \psi)^2} - \frac{1}{(d_{\odot} + R_{\text{sm}} \cos \psi)^2} \right) \\ &= 16 \frac{d_{\odot} GM_{\odot} m_{\text{isp}}}{R_{\text{sm}}^3} \frac{\cos \psi}{\left(2\left(\frac{d_{\odot}}{R_{\text{cm}}}\right)^2 - 1 - \cos(2\psi) \right)^2}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

gdje je

$$m_{\text{isp}} = \frac{1}{2} \rho_{\text{isp}} \left(\frac{4\pi}{3} R_p R_e^2 - \frac{4\pi}{3} R_p^3 \right) = 1,015 \cdot 10^{22} \text{ kg} \quad (4.39)$$

masa jedne polovice ispušćenja (gustoća Zemljine tvari u ispušćenju je prosječno $\rho_{\text{isp}} = 2800 \text{ kg/m}^3$ [63]), a

$$R_{\text{sm}} = \frac{9}{16} R_{\oplus} \quad (4.40)$$

je udaljenost središta mase poluispušćenja od središta Zemlje detaljno izvedena u Dodatku C u relaciji (C.10). Konačno je zakretni moment Sunca

$$\mathbf{N}_{\odot} = \mathbf{R}_{\text{sm}} \times \Delta \mathbf{F}_{\odot} = 16 \frac{d_{\odot} GM_{\odot} m_{\text{isp}}}{R_{\text{sm}}^2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\left(2\left(\frac{d_{\odot}}{R_{\text{sm}}}\right)^2 - 1 - \cos(2\psi) \right)^2} \hat{\mathbf{N}}. \quad (4.41)$$

Izraz za zakretni moment Mjeseca na Zemlju potpuno je analogan, samo što od ψ trebamo oduzeti nagib Mjesečeve orbite prema ekliptičkoj ravnini, λ :

$$\mathbf{N}_L = 16 \frac{d_L GM_L m_{\text{isp}}}{R_{\text{sm}}^2} \frac{\sin(\psi - \lambda) \cos(\psi - \lambda)}{\left(2\left(\frac{d_L}{R_{\text{sm}}}\right)^2 - 1 - \cos(2\psi - 2\lambda) \right)^2} \hat{\mathbf{N}}. \quad (4.42)$$

Ova se dva zakretna momenta zbrajaju, a djelotvorno im se pribraja i moment same Zemlje zbog njezinih unutrašnjih nepravilnosti (pomak središta mase plašta i kontinenata u odnosu na središte Zemlje i dr.) $|\Delta \mathbf{N}_Z| \approx 4 \cdot 10^{21}$ kg m²/s [63], koji djeluje u suprotnu smjeru. Konačno je, prema (4.37),

$$\omega = \frac{N}{J\Omega \sin \psi} = \frac{5}{2} \frac{N_\odot + N_L - \Delta N_Z}{M_\oplus R_e^2 \Omega \sin \psi}. \quad (4.43)$$

Uvrštavajući sve vrijednosti iz tablice 1.2 u (4.41), (4.42) i u (4.43), te uz $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, dobivamo period rotacije od 83,068 ky.

Ovo je pogrešan rezultat iz nekoliko razloga: (i) način na koji je nagib Mjesečeve orbite λ uveden u teoriju nije dobar jer kut između Zemljine osi i osi Mjesečeve orbite *nije* $\psi - \lambda$, nego nešto složeniji budući da je λ kut između ekliptičke ravnine i Mjesečeve orbite, a ne između Zemljine ekvatorske ravnine i Mjesečeve orbite⁵; (ii) korišten je centralni gravitacijski potencijal za račun učinka necentralnosti Zemlje; točnije, gravitacijski potencijal privlačenja elipsoida (mase m) i kugle (mase M) *nije* $-GMm/r$, nego složeniji; time ni sila nije jednostavno GMm/r^2 , kao što je gore korišteno, nego drukčija.

Ipak, u literaturi nema kritike autora [62, 63] u vezi ove teme, tako da je ovo prvi dokaz da njihova teorija po ovom pitanju nije dobra. To je i dodatan razlog davanja mjesta njihovom računu.

4.7.2 Izračun Zemljina precesijskog perioda

Kako smo vidjeli, prvo što trebamo naći za ispravan pristup problemu je ispravan gravitacijski potencijal između Zemlje i nekog tijela u svemiru uzimajući u obzir popravku od Zemljine elipsoidnosti odnosno “neokruglosti”.

⁵Gore korištena pretpostavka na drugi se način može izreći kao pretpostavka da čvorišna linija Zemljine ekvatorske i ekliptičke ravnine leži na istom pravcu kao i čvorišna linija ekliptičke i Mjesečeve orbitne ravnine. No to jednostavno nije točna pretpostavka, kako će se vidjeti na sl. 4.5.

4.7.2.1 Gravitacijski potencijal

Uzmimo mali element volumena Zemlje mase m_i i volumena V_i s vektorom položaja u odnosu na središte Zemlje \mathbf{R}_i i s vektorom udaljenosti od Sunca \mathbf{r}_i . Neka \mathbf{R}_i zatvara kut η_i s vektorom udaljenosti Središta Zemlje od središta Sunca, \mathbf{d} (kojemu je iznos d_\odot). Za prikaz ćemo posuditi sliku 4.4 gore, na kojoj su naznačene sve ove veličine. Kako je, očito sa slike, $\mathbf{d} = \mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i$, to je gravitacijski potencijal između elementa volumena i i Sunca

$$V_i = -\frac{GM_\odot m_i}{r_i} = -\frac{GM_\odot m_i}{|\mathbf{d} - \mathbf{R}_i|} = -\frac{GM_\odot m_i}{d_\odot \sqrt{1 - 2\frac{R_i}{d_\odot} \cos \eta_i + \frac{R_i^2}{d_\odot^2}}}. \quad (4.44)$$

Međutim, znamo da je korijen ovog oblika funkcija izvodnica Legendreovih polinoma $P_n(x)$ (v. npr. [12], str. 514):

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n P_n(x), \quad (4.45)$$

odnosno

$$V = \sum_{i=1}^N V_i = -\frac{GM_\odot}{d_\odot} \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} m_i \left(\frac{R_i}{d_\odot}\right)^n P_n(\cos \eta_i). \quad (4.46)$$

Ovaj razvoj po Legendreovim polinomima jako brzo konvergira. Naime, R_i/d_\odot može biti najviše $R_\oplus/d_\odot = 4,25 \cdot 10^{-5}$, tj. svaki član reda je 5 redova veličine manji od prethodnog. Vidimo da prvi član daje poznati gravitacijski potencijal $-GM_\odot M_\oplus/d_\odot$ za okruglo tijelo⁶ pa trebamo samo još jedan član za dobar proračun. Međutim, prvi član ($n = 1$) iščezava:

$$V_{n=1} = -\frac{GM_\odot}{d_\odot^2} \sum_{i=1}^N m_i R_i \cos \eta_i = -\frac{GM_\odot}{d_\odot^3} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{d} = 0 \quad (4.47)$$

⁶Taj potencijal i dobivamo ukoliko u (4.46) prijedemo sa \sum_i na integral (uz $m_i \rightarrow dm = \rho dV$) i integriramo po kugli:

$$V = -\frac{GM_\odot \rho}{d_\odot} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_\oplus} \left(\frac{R}{d_\odot}\right)^n R^2 dR \int_0^\pi d\eta_i \sin \eta_i P_n(\cos \eta_i) = (\text{nešto}) \int_{-1}^1 P_n(x) dx = 0$$

zbog ortogonalnosti Legendreovih polinoma (posebno, ortogonalnosti na $P_1(x) = 1$).

jer smo sustav stavili tako da mu je ishodište na položaju središta mase, tj. središta Zemlje, koji je po definiciji $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_i$. Zanimljivo je ovdje primijetiti sličnost s elektrodinamikom: ovo je zapravo multipolni razvoj gravitacijskog potencijala u kojem dipolni član ($n = 1$) iščezava upravo zato što, za razliku od elektrodinamike, gravitacijska sila nema dva “gravitacijska pola”.

Prema tome je prvi član popravke treći u redu, tj. $n = 2$. Kako je $P_2(\cos \eta_i) = \frac{3}{2} \cos^2 \eta_i - \frac{1}{2}$, to je:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{GM_\odot M_\oplus}{d_\odot} + \frac{GM_\odot}{2d_\odot^3} \sum_{i=1}^N (1 - 3 \cos^2 \eta_i) m_i R_i^2 \\ &= -\frac{GM_\odot M_\oplus}{d_\odot} + \frac{GM_\odot}{2d_\odot^3} \sum_{i=1}^N m_i \left(2(X_i^2 + Y_i^2) - (X_i^2 + Z_i^2) - (Y_i^2 + Z_i^2) \right) \\ &= -\frac{GM_\odot M_\oplus}{d_\odot} + \frac{GM_\odot}{2d_\odot^3} (3I'_{zz} - \text{Tr} \mathbf{I}'). \end{aligned} \quad (4.48)$$

U drugom smo koraku prepoznali da je $Z_i = R_i \cos \eta_i$ i presložili članove, a u trećem prepoznali definicije pojedinih inercijskih momenata. Međutim, valja naglasiti da su ovo momenti oko osi koordinatnog sustava (X, Y, Z) (označenog crticom) kojem smo privremeno orjentirali os Z u smjeru vektora \mathbf{d} . Budući da je trag invarijantan na rotacije ($\text{Tr} \mathbf{I}' = \text{Tr} \mathbf{I}$), ostaje nam izraziti I'_{zz} pomoću I_{xx} , I_{yy} i I_{zz} u sustavu Zemlje jer njih znamo. Uočimo da je inercijski moment oko neke osi općenito težinski zbroj masa s udaljenostima od osi kao težinskim koeficijentima. To znači da je

$$I'_{zz} = \sum_{i=1}^N m_i (R_i \sin \eta_i)^2 = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{R}_i \times \hat{\mathbf{d}})^2. \quad (4.49)$$

Izrazimo li sada \mathbf{R}_i u koordinatama Zemljina sustava (x, y, z) , a $\hat{\mathbf{d}}$ preko kosinusa smjerova prema pojedinim osima istog sustava, imat ćemo

$$\begin{aligned} I'_{zz} &= \sum_{i=1}^N m_i \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x_i & y_i & z_i \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix}^2 \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left((x_i^2 + y_i^2) \cos^2 \gamma + (x_i^2 + z_i^2) \cos^2 \beta + (y_i^2 + z_i^2) \cos^2 \alpha \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) + J \cos^2 \gamma \\
&= I + (J - I) \cos^2 \gamma.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

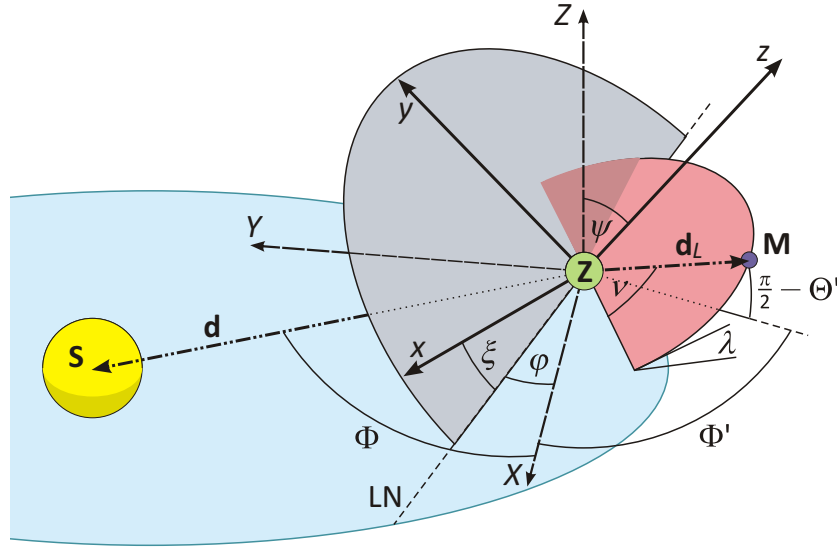
U prvom smo koraku odmah izbacili sve članove sume koji imaju mješovite umnoške koordinata jer su osi Zemljina sustava ujedno i njene glavne osi pa ti elementi inercijskog momenta iščezavaju. U drugom smo koraku iskoristili jednakost dvaju Zemljinih momenata, uz oznake $I = I_{xx} = I_{yy}$ i $J = I_{zz}$ koje ćemo nadalje koristiti. Na kraju smo iskoristili identitet za kosinuse smjerova, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Kako je očito $3I'_{zz} - \text{Tr}\mathbf{I} = 3I'_{zz} - 2I - J$, konačno je potencijal (4.48):

$$V = -\frac{GM_{\odot}M_{\oplus}}{d_{\odot}} + \frac{GM_{\odot}}{2d_{\odot}^3}(J - I)(3\cos^2 \gamma - 1). \tag{4.51}$$

Kut γ (kut između vektora \mathbf{d} i Zemljine osi rotacije) se mijenja pri okretanju Zemlje oko Sunca. Budući da je period Zemljina ophoda oko Sunca nekoliko redova veličine manji od perioda precesije, možemo gravitacijski potencijal usrednjiti po ophodu. No gornji izraz za potencijal je izražen u koordinatama Zemljina koordinatnog sustava, a za potpunu sliku (i za usrednjavanje) trebamo izraz za potencijal u koordinatama sustava vezanog za ekliptičku ravninu. Za daljnje razumijevanje, sve su koordinate, Eulerovi kutovi Zemlje i pojedine okretne ravnine prikazane na sl. 4.5. Kut γ u izrazu (4.51) je, sjetimo se, kut između Zemljine osi rotacije (z na sl. 4.5) i radij-vektora Sunca (Mjeseca) \mathbf{d} (\mathbf{d}_L) u istom sustavu, a to je po definiciji polni kut u Zemljinu sfernom sustavu, tj. taj kut daje projekciju z_{\odot} radij-vektora \mathbf{d} na Zemljinu os: $z_{\odot} = |\mathbf{d}| \cos \gamma = d_{\odot} \cos \gamma$. Prema tome, geometrijski član $3\cos^2 \gamma - 1$ u potencijalu (4.51) možemo napisati kao $3\frac{z_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} - 1$.

Budući da nam je fizika ovog problema invarijantna na smjer osi x i y , kao i na smjer osi X i Y , radi jednostavnosti možemo staviti osi x i X duž sjecišta Zemljine ekvatorske i ekliptičke ravnine, tzv. *čvorišne linije* (eng. *line of nodes*), označene s “LN” na sl. 4.5.

S takvim izborom, prijelaz iz Zemljina sustava (x, y, z) u ekliptički sustav



Slika 4.5: Shema koordinatnih odnosa Zemlje, Mjeseca i Sunca. (x, y, z) su osi Zemljina koordinatnog sustava, (X, Y, Z) su osi koordinatnog sustava u ekliptičkoj ravnini, kojem je ishodište u Zemljinu središtu, a os Z okomica na ekliptičku ravninu, (φ, ξ, ψ) su Zemljini Eulerovi kutovi prema ekliptičkoj ravnini, Φ je sferna koordinata Sunca u sustavu (X, Y, Z) ($\Theta = 0$ po definiciji), Φ' i Θ' su sferne koordinate Mjeseca u istom sustavu, ν je rotacijski i λ precesijski Eulerov kut Mjesečeve orbite, d i d_L su radij-vektori Sunca i Mjeseca u tom sustavu, LN je čvorišna linija. Ljestvica nije prirodna.

(X, Y, Z) predstavlja zaokret koordinatnog sustava za ψ oko osi $x = X$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \cos \psi - Z \sin \psi \\ Y \sin \psi + Z \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Ekliptičke sferne koordinate Sunca i Mjeseca su prema sl. 4.5:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\odot} = d_{\odot} \begin{pmatrix} \cos \Phi \\ \sin \Phi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (4.53)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_L = d_L \begin{pmatrix} \cos \Phi' \sin \Theta' \\ \sin \Phi' \sin \Theta' \\ \cos \Theta' \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Uvrštavanjem koordinata (4.53) za Sunce u (4.52) dobivamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\odot} = d_{\odot} \begin{pmatrix} \cos \Phi \\ \cos \psi \sin \Phi \\ \sin \psi \sin \Phi \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

odnosno

$$\cos^2 \gamma_{\odot} = \frac{z_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} = \sin^2 \psi \sin^2 \Phi. \quad (4.56)$$

Pri svakom ophodu Zemlje oko Sunca, Φ napravi puni krug. Stoga usrednjavanje po ophodu Zemlje oko Sunca znači upravo usrednjavanje po Φ , a kako je $\langle \sin^2 \Phi \rangle = \frac{1}{2}$, potencijal (4.51) između Zemlje i Sunca je:

$$V_{\odot} = -\frac{GM_{\odot}M_{\oplus}}{d_{\odot}} + \frac{GM_{\odot}}{2d_{\odot}^3}(J - I) \left(\frac{3}{2} \sin^2 \psi - 1 \right). \quad (4.57)$$

Potpuno slično dobivamo potencijal između Zemlje i Mjeseca, mada nešto složenije jer njegov ophod nije u ekliptičkoj ravnini. Uvrštavanjem koordinata Mjeseca (4.54) u (4.52) imamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_L = d_L \begin{pmatrix} \cos \Phi' \sin \Theta' \\ \cos \psi \sin \Phi' \sin \Theta' - \sin \psi \cos \Theta' \\ \sin \psi \sin \Phi' \sin \Theta' + \cos \psi \cos \Theta' \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \langle \cos^2 \gamma_L \rangle &= \frac{\langle z_L^2 \rangle}{d_L^2} = \langle \sin^2 \psi \sin^2 \Phi' \sin^2 \Theta' + \cos^2 \psi \cos^2 \Theta' + \\ &\quad + 2 \sin \psi \cos \psi \sin \Phi' \sin \Theta' \cos \Theta' \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \psi + \left(\cos^2 \psi - \frac{1}{2} \sin^2 \psi \right) \langle \cos^2 \Theta' \rangle. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Pogledamo li ravninu Mjesečeve orbite na sl. 4.5, vidimo da kut Θ' možemo rekonstruirati pomoću nagiba Mjesečeve orbite prema ekliptičkoj ravnini λ i njegova trenutnog kuta prema čvorišnoj liniji te ravnine s ekliptičkom:

$$d_L \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta'\right) = d_L \cos \Theta' = d_L \sin \nu \sin \lambda, \quad (4.60)$$

a kako Mjesec pri okretanju oko Zemlje zapravo mijenja kut ν , to usrednjavanje po jednom ophodu znači usrednjavanje po ν , koji zbog $\langle \cos^2 \nu \rangle = \frac{1}{2}$ daje

$$\begin{aligned} \langle \cos^2 \gamma_L \rangle &= \frac{1}{2} \sin^2 \psi + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \psi\right) \frac{1}{2} \sin^2 \lambda \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \lambda + \frac{1}{2} \sin^2 \psi \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \lambda\right). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Konačno je, vraćanjem ovoga u (4.51), potencijal između Zemlje i Mjeseca:

$$V_L = -\frac{GM_L M_\oplus}{d_L} + \frac{GM_L}{2d_L^3} (J - I) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \lambda\right) \left(\frac{3}{2} \sin^2 \psi - 1\right). \quad (4.62)$$

Tek sad kad imamo dobar potencijal možemo dobro izračunati i period. Za usporedbu s prethodnim odjeljkom, vidimo kako je uključivanje nagiba Mjesečeve orbite dosta složenije nego samo stavljanje $\psi - \lambda$ umjesto ψ . Također, uočimo da je “unutrašnji doprinos” same Zemlje precesiji jako očito uključen u množitelju $J - I$ u (4.57) i (4.62): jasno je da za $J = I$ (Zemlja okrugla) popravka potencijalu iščezava; s druge strane, i J i I jako ovise o unutrašnjoj nerazmjernoj raspodjeli Zemljine mase i sl. A za I i J imamo jako precizne eksperimentalne podatke iz promatranja kretanja satelita u Zemljinoj orbiti.

4.7.2.2 Precesija u izobličenom potencijalu

Sa sl. 4.5 jasno vidimo da je precesijska frekvencija zapravo promjena Eulerova kuta φ Zemlje, tj. $\omega = \dot{\varphi}$. Tu promjenu najlakše možemo naći u Lagrangeovu formalizmu.

Definiramo Eulerove kutove Zemlje (φ, ξ, ψ) kao na sl. 4.5. Sa slike vidimo da je vektor $\dot{\psi}$ usmjeren duž čvorišne linije LN, vektor $\dot{\xi}$ duž osi $\hat{\mathbf{z}}$, a vektor $\dot{\varphi}$ duž osi $\hat{\mathbf{Z}}$, čija projekcija na x, y -ravninu zatvara kut $\frac{\pi}{2} - \xi$ s osi x . Ukratko,

$$\dot{\psi} = \hat{\mathbf{i}}\dot{\psi} \cos \xi - \hat{\mathbf{j}}\dot{\psi} \sin \xi \quad (4.63)$$

$$\dot{\xi} = \hat{\mathbf{k}}\dot{\xi} \quad (4.64)$$

$$\dot{\varphi} = \hat{\mathbf{i}}\dot{\varphi} \sin \psi \sin \xi + \hat{\mathbf{j}}\dot{\varphi} \sin \psi \cos \xi + \hat{\mathbf{k}}\dot{\varphi} \cos \psi. \quad (4.65)$$

Prema tome, iznosi ukupnog vektora Zemljine kutne brzine (označimo je s $\tilde{\Omega}$) na pojedinim osima su

$$\tilde{\Omega}_x = \dot{\psi} \cos \xi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \xi \quad (4.66)$$

$$\tilde{\Omega}_y = -\dot{\psi} \sin \xi + \dot{\varphi} \sin \psi \cos \xi \quad (4.67)$$

$$\tilde{\Omega}_z = \dot{\xi} + \dot{\varphi} \cos \psi. \quad (4.68)$$

Odatle je kinetička energija rotacije Zemlje

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{i=x,y,z} I_{ii} \tilde{\Omega}_i^2 \\ &= \frac{I}{2} (\tilde{\Omega}_x^2 + \tilde{\Omega}_y^2) + \frac{J}{2} \tilde{\Omega}_z^2 \\ &= \frac{I}{2} (\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \psi) + \frac{J}{2} (\dot{\xi} + \dot{\varphi} \cos \psi)^2. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Budući da energija rotacije Zemlje oko Sunca $\frac{1}{2} (d_{\odot}^2 + d_{\odot} \dot{\Phi}^2)$, potpuni je lagrangian Zemlje s uračunatim gravitacijskim potencijalima Sunca (4.57) i Mjeseca (4.62):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (d_{\odot}^2 + d_{\odot} \dot{\Phi}^2) + \frac{GM_{\odot}M_{\oplus}}{d_{\odot}} + \frac{GM_L M_{\oplus}}{d_L} \\ &\quad + \frac{I}{2} (\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \psi) + \frac{J}{2} (\dot{\xi} + \dot{\varphi} \cos \psi)^2 \\ &\quad - \frac{3}{4} G(J - I) \left(\frac{M_{\odot}}{d_{\odot}^3} + \frac{M_L}{d_L^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \lambda \right) \right) \left(\sin^2 \psi - \frac{2}{3} \right). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Prva dva člana predstavljaju Keplerov problem, treći je Zemljino djelovanje na Mjesec u prvom redu (zanemarujemo pomak Zemljina središta mase u odnosu na središte mase sustava Mjeseca i Zemlje), četvrti i peti su energija vrtnje Zemlje oko osi, a šesti je gore izračunata ukupna (i za Sunce i za Mjesec) popravka gravitacijskog potencijala, koja utječe na vrtnju Zemlje oko svoje osi. Tu ćemo popravku dalje označavati s V' .

Euler–Lagrangeova jednadžba za koordinatu ψ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad (4.71)$$

glasi

$$I\dot{\varphi}^2 \sin \psi \cos \psi - J\dot{\varphi} \left(\dot{\xi} + \dot{\varphi} \cos \psi \right) \sin \psi - \frac{\partial V'}{\partial \psi} = I\ddot{\psi}. \quad (4.72)$$

Ovime smo dobili kvadratnu jednadžbu za $\dot{\varphi}$ odnosno precesijsku kutnu brzinu, s jedinom nepoznanicom $\ddot{\psi}$. Međutim, iz teorije zvrkova općenito znamo da taj član dolazi od nutacije (promjena Eulerove koordinate ψ) i potpunim rješavanjem lagrangiana, točnije Euler–Lagrangeovih jednadžbi za preostale dvije koordinate, dobili bismo rješenje za ψ oscilatorno u vremenu, i to s frekvencijom jednakom frekvenciji vrtnje Zemlje⁷, ovdje $\dot{\xi} = \Omega$, i jako malom apsolutnom promjenom ψ (amplitudom). Iz tog će pak u gornjoj jednadžbi očito proizići i oscilatorni član u precesiji. No mi tražimo period jedne precesije odnosno srednji $\dot{\varphi}$, kojim usrednjenjem $\ddot{\psi}$ iščezava upravo zbog oscilatorna karaktera. Rješenja jednadžbe (4.72) uz taj uvjet su onda (uz $\dot{\xi} = \Omega$)

$$\dot{\varphi}_{1,2} = -\frac{J\Omega}{2(J-I)\cos\psi} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(J-I)}{J^2\Omega^2} \operatorname{ctg}\psi \frac{\partial V'}{\partial \psi}} \right). \quad (4.73)$$

Jednostavna procjena na temelju svih vrijednosti iz tablice 1.2

$$\frac{4(J-I)}{J^2\Omega^2} \operatorname{ctg}\psi \frac{\partial V'}{\partial \psi} \sim 6 \left(\frac{J-I}{J} \right)^2 \frac{G}{\Omega^2} \left(\frac{M_\odot}{d_\odot^3} + \frac{M_L}{d_L^3} \right) \sim 10^{-9} \quad (4.74)$$

pokazuje da korijen možemo izvrsno razviti do prvog reda. Kako je rješenje

⁷Euler–Lagrangeova jednadžba po ξ daje nam

$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} \dot{\psi} \operatorname{tg}\psi,$$

te uvrštavanjem toga i $\dot{\varphi}$ iz (4.72) u Euler–Lagrangeovu jednadžbu po φ i algebarskim sređivanjem dobivamo

$$\ddot{\psi} = -\frac{J^2\dot{\xi}^2}{I} \frac{\sin \psi \cos \psi}{I \sin^2 \psi + J \cos^2 \psi} \approx -\left(\frac{J\Omega}{I} \right)^2 \psi.$$

Odatle je jasno da je rješenje za ψ oscilatorno s frekvencijom $\approx \Omega$. Uvrštavanje ovoga natrag u $\dot{\varphi}$ dalo bi tu harmonijsku popravku, no nju bi u krajnjem izrazu izgubili pri usrednjavanju.

s “+” predznakom nefizičko⁸, za $\omega = \dot{\varphi}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\omega &= -\frac{J\Omega}{2(J-I)\cos\psi} \left(1 \pm \left(1 - \frac{1}{2} \frac{4(J-I)}{J^2\Omega^2} \operatorname{ctg}\psi \frac{\partial V'}{\partial \psi} \right) \right) \\ &= -\frac{3}{2} \frac{G}{\Omega} \frac{J-I}{J} \left(\frac{M_{\odot}}{d_{\odot}^3} + \frac{M_L}{d_L^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \lambda \right) \right) \cos \psi.\end{aligned}\quad (4.75)$$

Ovo je konačan izraz za precesijsku kutnu brzinu Zemlje. Vidimo da je izražena preko stalnica u tablici 1.2, izuzev Zemljine kutne brzine Ω koja je dobro poznata ($\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi/24 \text{ h} = 7.272 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$). Naravno, negativan predznak samo govori o smjeru Zemljine precesije koji je negativan ($-\hat{\mathbf{Z}}$), što smo već dobili u odjeljku 4.7.1 pri gruboj procjeni.

Naposljetku imamo period Zemljine precesije

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi\Omega}{3G} \frac{J}{J-I} \frac{1}{\left(\frac{M_{\odot}}{d_{\odot}^3} + \frac{M_L}{d_L^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \lambda \right) \right) \cos \psi}.\quad (4.76)$$

Uvrštavajući sve stalnice u ovaj izraz dobivamo

$$\tau = 25,743 \text{ ky},\quad (4.77)$$

što jest točan period Zemljine precesije.

4.7.3 Komentar

Vrh na sl. 3.5 koji odgovara Zemljinoj precesiji, najbliži našoj vrijednosti, nalazi se na periodu 25,860 ky. Usporedbom s ovdje teorijski izračunatom vrijednošću (4.77) vidimo nevjerojatno dobro teorijsko slaganje s eksperimentalnim podatkom za ovaj vrh. Relativna pogrješka iznosi samo 0,45%! Međutim, upravo zato što se ovaj vrh tako vjerno reproducira, drugim riječima što je tako “čist”, nema drugih doprinosa njegovom intenzitetu,

⁸Naime, situacija u kojoj bi bilo $\dot{\varphi} \gg \Omega$ je nefizička; precesija je uvijek sporija od rotacije. Za detalje v. npr. [34], §35–§37.

relativno je nizak u odnosu na ostale. Drugi je razlog što svaka od ovih periodičnosti nije prava periodičnost, nego bi bolje bilo reći “kvaziperiodičnost” [38]: ovaj je proces uzajamno perturbiran svim drugim procesima, drugim planetima Sunčeva sustava, promjenom ekscentriciteta Zemljine i Mjesečeve putanje oko Sunca itd., pa se precesija globalno lagano i nepredvidivo mijenja. Takve, sitne popravke opisane su npr. u [68]. Stoga i period od 25,05 ky i period od 25,84 ky pripisujemo ovom precesijskom mehanizmu od okvirnih 26 ky.

4.8 Period od 23 000 godina

Ovaj se period u literaturi jako često naziva precesijskim periodom, premda to nije točno. To je do detalja potkrijepljeno u ovom radu, u raspravi perioda od 26 ky (odjeljak 4.7) koji jest temeljni precesijski period. Ovaj period, koji u tablici 3.1 ima vrijednost 23,58 ky, potječe ne od precesije, nego od periodičnosti u kombiniranom tzv. “precesijskom indeksu” $e \sin \Pi$ iz Milankovićeve teorije, relacija (4.27). Točnije, vodeći član razvoja (4.27) ima taj period, a ne precesija.

Ovo je zapravo najčešći pogrešan koncept u cijelom nizu radova koji se ovim pitanjima bave (npr. [28, 53, 50]) i dolazi od toga što promjena Π ima veze s precesijom. Svejedno, taj je koncept objavljen i u vrhunskim časopisima (npr. [16, 53]), pa je potrebno jasno upozoriti na njegovu netočnost [26].

4.9 Period od 21 000 godina

Ovaj je period jedan od tri najvažnija perioda Milankovićeve teorije [38], a predviđaju ga gotovo svi proračuni vezani uz istu [8, 10, 11]. On nastaje kao superpozicija dvaju perioda: perioda od 112 ky u apsidnoj precesiji Zemljine orbite u jednom smjeru i Zemljine precesije u drugom smjeru. Kako ta dva gibanja idu jedno prema drugome, konačan je učinak ukupni period od 21

ky:

$$\omega = \omega_{112\text{ky}} + \omega_{26\text{ky}} = \frac{2\pi}{\tau_1} + \frac{2\pi}{\tau_2} \quad (4.78)$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 21,1 \text{ ky}. \quad (4.79)$$

Problem koji ovdje nastaje što u našem FFT-u nema toga perioda. Kako smo već naglasili, sami temeljni periodi zapravo predstavljaju kvaziperiode i nisu sukcesivno identični, pa ni od njihove superpozicije ne očekujemo ništa više. Ipak, nigdje u literaturi nije upozoreno na nedostatak ovog perioda u EPICA klimatskom zapisu koji je jedan od najvažnijih i najcitiranijih.

Prema tome, ovo pitanje ostaje za razriješiti, pogotovo jer je ovo jedan od tri najistaknutija Milankovićeva perioda koji bi svakako trebao biti očigledan samim pogledom na FFT paleografskih podataka.

4.10 Period od 19 000 godina

Za period od 19,09 ky u tablici 3.1 vrijedi praktički sve rečeno za period od 23 ky (odjeljak 4.8). Naime, ovaj period je idući dominantni član razvoja precesijskog indeksa $e \sin \Pi$ (4.27) u Milankovićevoj teoriji, a za nj je također jako često vezan pogriješan naziv “precesijski period”, iz istih razloga koji su navedeni u 4.8. Blažoj varijaciji ovoga perioda, drugim riječima izražaju njegove kvaziperiodičnosti pripisujemo i period od 18,22 ky u tablici 3.1.

Uz to, premda u Milankovićevim izvornim radovima nije tako naveden [42, 44, 45, 46] niti je prvi harmonik u razvoju ijednog člana Milankovićeve teorije, ovaj se period u literaturi smatra jednim od temeljnih Milankovićevih perioda [8, 10, 11, 26, 53].

4.11 Period od 11 000 godina

Milanković gradi teoriju prvenstveno na osunčanju sjeverne polutke pretpostavljajući da pomaci granice leda predstavljaju glavni povratni mehanizam Zemlje. Proširujući Milankovićevu teoriju na ekvatorsko osunčanje,

Berger je pokazao [11] da upravo varijacije ozračivanja tih područja daju period od 11 ky i od 5,5 ky, “usput” dajući i doprinos periodima od 123 ky i 95 ky (odnosno velikom periodu od 100 ky). Upozoravajući na zanemarivanje ekvatorskog pojasa, Berger je do perioda od 11 ky došao pokazavši da ekvatorsko osunčanje umjesto jednog maksimuma za period precesijskog indeksa na ~ 23 ky ima zapravo dva maksimuma, dajući poluperiode tog perioda, tj. periode od ~ 11 ky.

4.12 Periodi od ~ 5 000 godina

Na potpuno isti način kako je pokazao podrijetlo vrha na 11 ky, Berger [11] je pokazao podrijetlo vrha od 5.5 ky, kao četvrtinskog perioda precesijskog indeksa. Takav period vidimo u tablici 3.1 na vrijednostima 5,42 ky i 5,73 ky.

S druge strane, [65] pokazuje da period od oko 5 ky dolazi kao odgovor na precesijski period, kojemu je mehanizam svojevrsna kompetencija površine pokrivene pustinjom i površine pokrivene vegetacijom koja onda rezultira u količini padalina a ona ima izravan utjecaj na klimu. Takav bi period predstavljao međudjelovanje Zemljina vlastitog mehanizma s astronomski uvjetovanim parametarskim promjenama. Ovime možemo objasniti vrijednost od 4,74 ky u tablici 3.1.

4.13 Drugi periodi

Mali periodi do oko 20 ky koji nisu izravno povezani s astronomskim promjenama parametara ili pak predstavljaju njihove slabije izražene harmonike često se zovu “sub–Milankovićevi” periodi [11, 65]. Budući da se radi o kraćim periodima, njihovo objašnjenje je puno složenije, a vidjeli smo koliko je složeno objašnjenje čak i izrazito dugih perioda.

Stoga u literaturi uopće nema objašnjenja sub–Milankovićevih perioda, a pokušaja ima jako malo. Naime, mala je motivacija za traženjem uzroka

ovih manjih perioda kad je samo po sebi jasno da nikad ne možemo tvrditi da smo određenom manjem periodu jednoznačno pridružili određeni mehanizam, pa je prema tome moguće (štoviše, najvjerojatnije) da svakom od njih doprinosi cijeli skup mehanizama. Uz to, vrlo lako mogu postojati doprinosi bilo linearnih bilo nelinearnih međudjelovanja tih mehanizama pa je krajnji ishod da je jako teško raspetljati cijelu priču oko malih perioda.

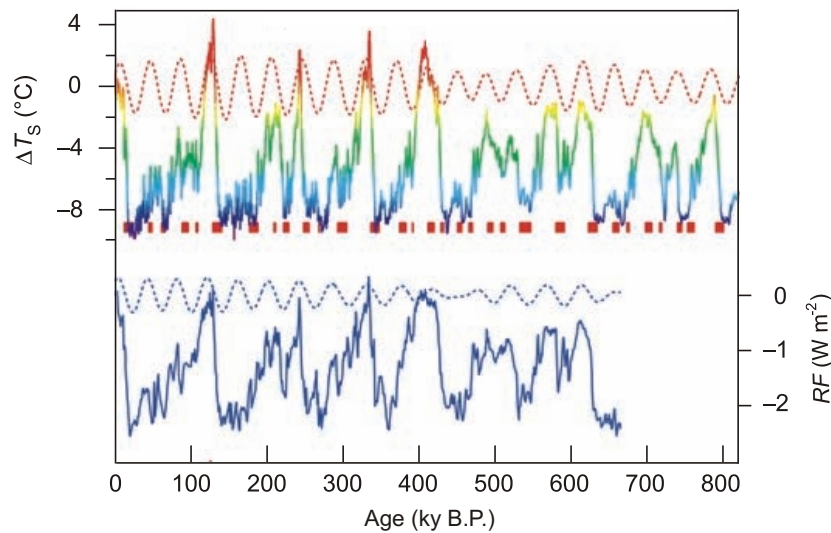
Zapravo, jedini pokušaji da se objasne neki periodi manji od 20 ky, izuzev 19 ky, su Bergerov [11] i Tuenterov [65], koji pokušavaju objasniti periode od oko 5 ky i 10 ky. Period od oko 5 ky smo objasnili u prethodnom odlomku. Period od 10 ky Tuenter objašnjava [65] identično svom objašnjenju perioda od oko 5 ky u prethodnom odlomku: ta su dva perioda jedina dva u potpisu njegove analize natjecanja površine pod pustinjom i površine pod vegetacijom kao zemaljskog mehanizma odgovora na astronomske varijacije.

Budući da su to jedina objašnjenja vrhova manjih od 20 ky, a kako smo rekli, mogući mehanizmi su izrazito složeni i vjerojatno nelinearni, ni mi se nećemo upuštati u daljnju analizu ovih perioda. Ipak, vrijednosti u tablici 3.1 manje od 20 ky (izuzev 19 ky) ovdje su prvi put ovako popisane i to isključivo zato jer Fourierove analize redovito ne koriste izravni FFT nego rade zaglađivanje bilo izvornih podataka bilo FFT-podataka kojim izgube sve manje vrhove baveći se primarno s nekoliko najosnovnijih. Ovdje smo koristili egzaktn pristup u kojem nije apsolutno ništa ni zanemareno niti izglađeno. Zato na sl. 3.5(b) i ima onoliko vrhova. Dakle, ti vrhovi ostaju kao neriješeno pitanje, koje bi svakako trebalo objasniti. Jasno da će taj proces potrajati.

4.14 Zaključna usporedba

Ovdje smo dali objašnjenja podrijetla najistaknutijih vrhova na slici 3.5 i u tablici 3.1. Pri tom su objašnjeni svi vrhovi iznad 20 ky, a i nekoliko ispod (19 ky, 11 ky, 10 ky, 5 ky), dok su ostali vrhovi kratkih perioda ostavljeni daljnjem proučavanju i postavljeni kao svojevrsna problematika.

Konačno bi bilo zgodno, kad smo već objasnili najvažnije vrhove na sl. 3.2(a) odnosno 3.5 i u tablici 3.1 pomoću Milankovićeve teorije, i grafički prikazati usporedbu izvornog skupa podataka i Milankovićevih oscilacija. Jedan takav slikovit prikaz dali su Jouzel et al. u [28] i mi smo ga ovdje prilagodili. Prikazan je na sl. 4.6. Sa slike se jasno vidi preklapanje mak-

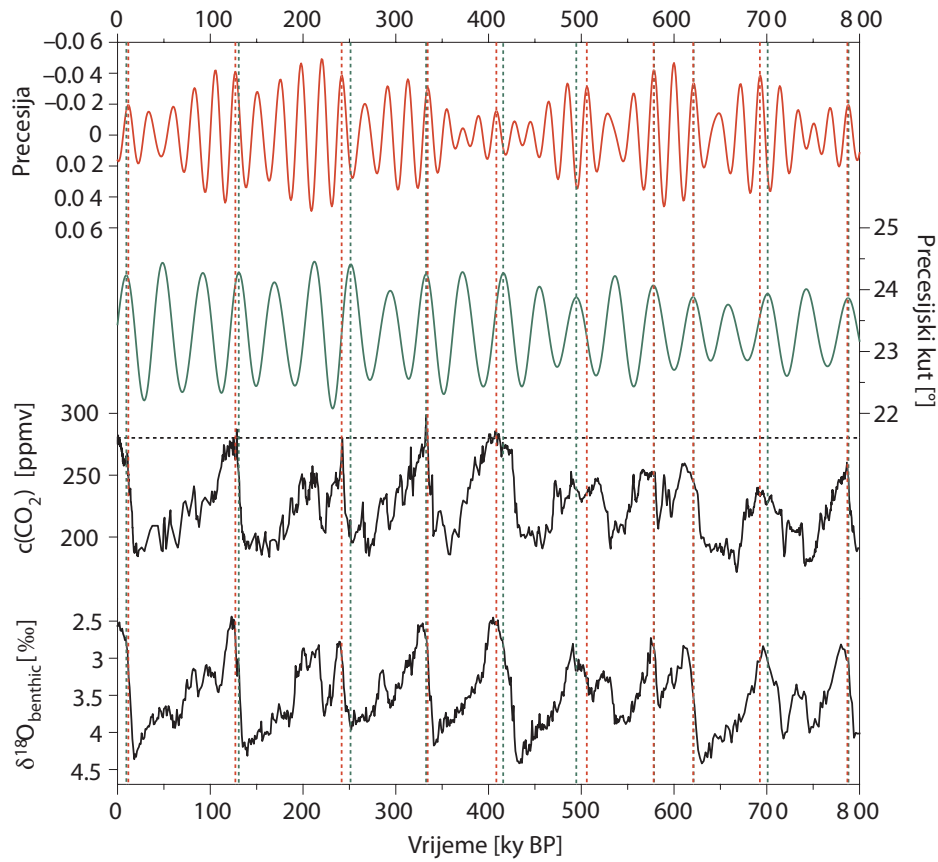


Slika 4.6: Gornji dio slike: temperatura (puna crta; plavo – hladnije; crveno – toplije) i oscilacije precesijskog indeksa (isprekidana crvena crta). Donji dio slike: koncentracija CO_2 i CH_4 (puna plava crta) i iste oscilacije (isprekidana plava crta). Prilagođeno iz [28].

simuma perioda precesijskog indeksa (periodi od ~ 23 ky) s maksimumima temperature i koncentracije ugljičnog dioksida i metana kroz posljednjih 800 ky.

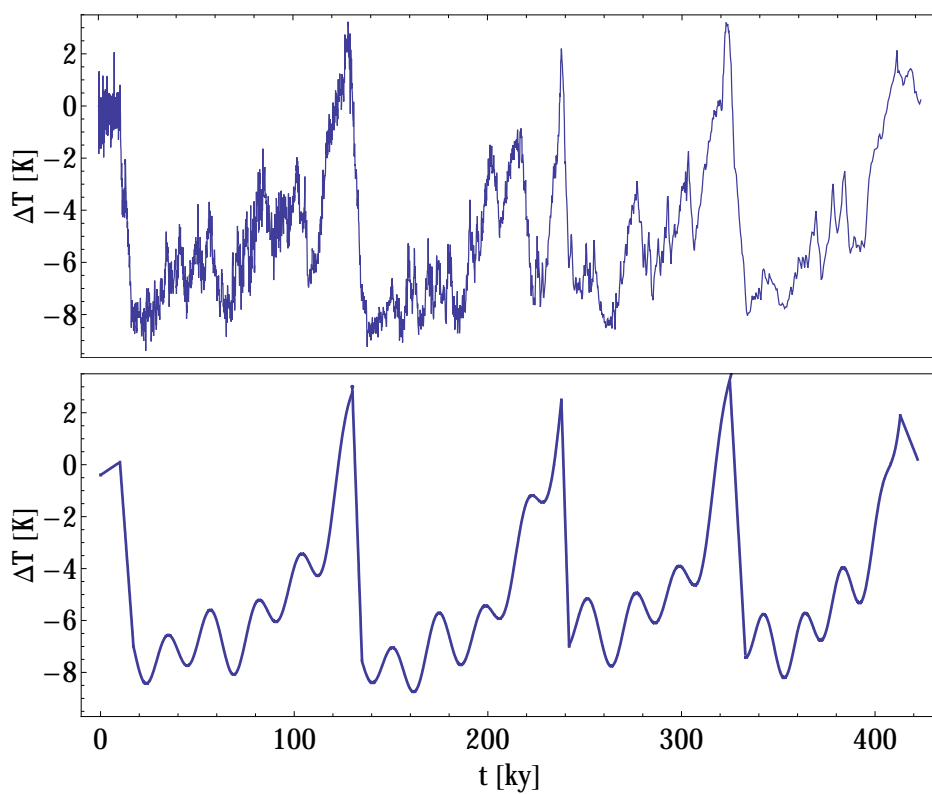
Nešto precizniju usporedbu s dva parametra Milankovićeve teorije napravili su Tzedakis et al. u [66]. Vodeći se njegovom idejom, nacrtali smo podatke za precesiju i precesijski kut, koje je izračunao Berger u [9] (odakle smo ih preuzeli), zajedno s EPICA podacima za promjenu gustoće izotopa ^{18}O (koja je izravna mjera temperature) i koncentraciju CO_2 [28]. Potom smo sve grafove prikazali jedan ispod drugog i povukli okomice koje povezuju vrhove. Tako se jasno vidi slaganje u fazi između Milankovićevih ciklusa i promjena u temperaturi i koncentraciji CO_2 . Prikaz toga dan je na sl. 4.7.

Konačno, malo smo se i sami poigrali Milankovićevim ciklusima pokušavši



Slika 4.7: Usporedba oscilacija precesije, precesijskog kuta i EPICA podataka za koncentraciju CO_2 i ^{18}O . Uspravne isprekidane crte povezuju maksimume u fazi.

rekonstruirati podatke postaje Vostok [53] za temperaturu (v. sl. 1.1). Naravno da ih je praktički nemoguće teorijski rekonstruirati, ali ovakva rekonstrukcija – procjena može dati slikovit uvid u kvalitetu teorije. Napravili smo sljedeće: uzeli smo rješenje za ψ kroz 100 ky (4.34) i na nj zbrojili obične sinusne oscilacije s periodom od 41 ky i 23 ky. Naravno, pri tom smo prilagodili amplitude izraza (4.34) pripadnom ciklusu, te faze precesijskog kuta i precesijskog indeksa — što su tri najistaknutija vrha na sl. 3.5(a). Kod ove slike zgodno je dodati i fizičko tumačenje brzih povrataka temperature nakon izlaska iz velikih ledenih doba (dugih ~ 100 ky). Smanjenje precesijskog kuta koje nije oscilatorno, kako kaže relacija (4.34), ide do neke granice i onda se odjednom u vrlo kratkom vremenu (tu “kratko”



Slika 4.8: Izvorni podatci s Vostoka (gornji dio) i funkcija dobivena superpozicijom funkcije (4.34) i sinusa s periodima 41 ky i 23 ky (donji dio).

znači reda veličine tisuću godina) vraća na početnu vrijednost. Podrijetlo je toga sljedeće: smanjenjem precesijskog kuta smanjuje se djelotvorna temperatura Zemljine površine; smanjenjem temperature dolazi do povećanja površine pod ledom, koje pak dovodi do pomaka Zemljina središta mase; taj pak pomak onda uzrokuje suprotan učinak na precesijski kut i u određenom trenutku kad se ovaj suprotni učinak izjednači s početnim prestaje smanjenje precesijskog kuta i počinje njegov nagli “oporavak” odnosno povratak na početnu vrijednost. Na taj se mehanizam pribrajaju kraće oscilacije odnosno kraći Milankovićeви periodi.

Zaključak

Najčešće korištena teorija za opis atmosferskih promjena i međudjelovanja u atmosferi je Arrheniusova statična teorija koja pretpostavlja da promjena koncentracije ugljičnog dioksida u atmosferi uzrokuje promjenu temperature, i to po logaritamskom zakonu (v. sl. 2.2). Ipak, postoji struja u znanosti koja kritizira ovakav pristup zbog zanemarivanja konvekcije pokazujući da upravo konvekcija predstavlja glavni mehanizam prijenosa topline u atmosferi. Takva teorija, koja se zove *adijabatskom teorijom*, ima nekoliko posljedica: (i) promjena temperature je u njoj uzrok promjene koncentracije CO₂, a ne obratno; (ii) antropogeni učinak na povišenje koncentracije CO₂ u atmosferi je zanemariv u odnosu na prirodne mehanizme tog povišenja.

Računalna analiza EPICA podataka integrirana sveukupno u programu DatEx izrađenom u sklopu ovog rada koristi nekoliko raznih modula za odabir važnih vrhova, čiji su algoritmi ovdje detaljno razrađeni. Koristeći takav program kao crnu kutiju, izdvojili smo iz FFT-a (v. sl. 3.2(a) i 3.2(b)) 62 najznačajnija vrha i ispisali ih u tablicu 3.1. Pri tom je FFT rađen potpuno, dakle bez glačanja podataka ili FFT-a.

U poglavlju 4 željeli smo odrediti mehanizme odgovorne za pojedine najbitnije periode iz te tablice. Budući da je najprihvaćenija teorija koja se tim pitanjem bavi Milankovićeva teorija, izveli smo glavne crte te teorije povezavši osunčanje na Zemlji s promjenama astronomskih parametara ekscentričnosti, precesije i precesijskog kuta Zemlje, te osnovne periode Milankovićeve teorije. Najvažniji vrhovi u FFT-u objašnjeni su mehanizmima Milankovićeve teorije i njenih proširenja na još neke astronomske parame-

tre (npr. precesijski indeks), premda dobrom dijelu perioda nije moguće pridružiti jedinstven mehanizam.

U takvom sustavu izmjena klime na Zemlji, glacijalna i interglacijalna razdoblja možemo shvatiti kao niz prirodnih eksperimenata u kojima se variraju rubni uvjeti koji za posljedicu imaju klimatske promjene. Shvaćeni tako, odražavaju fizičke mehanizme na kojima su velike promjene utemeljene [66, 53]. Dok ekscentričnost utječe na klimu mijenjajući amplitudu precesije a time i prosječni godišnji/polugodišnji tok Sunčeve energije na Zemlju, promjene u precesijskom kutu mijenjaju raspodjelu toka Sunčeve energije po geografskim širinama i po godišnjim dobima [69].

Pokazano je da svemirski/astronomski mehanizmi nisu dovoljni za dostatno objasniti ledena doba, nego treba u obzir uzeti i astronomske i Zemljine oscilatore [66]. Orbitno uvjetovane promjene prema tome titraju oko srednje vrijednosti koja je određena postupnim promjenama uvjeta na Zemlji, kao što su kontinentska topografija i geografija, stanje oceanskog dna i vječnog leda, sastav atmosfere i sl. [66].

Neki od tih odgovora vlastitih Zemlji mogu promijeniti osjetljivost samog sustava na astronomsko međudjelovanje ili na tok ugljičnog ciklusa na Zemlji [3, 4] kao jednog od najbitnijih Zemljinih mehanizama izazivajući time dodatno posloženje i raznolikost klimatskog spektra: premda je vrijeme kad će se dogoditi glacijal okvirno određeno astronomskom teorijom, njihovo trajanje određeno je specifičnim odgovorom Zemlje u tom trenutku.

Konačno, i podatci i analiza nedvosmisleno pokazuju da za porast temperature ili koncentracije ugljičnog dioksida nije nužno odgovoran čovjek i njegovo djelovanje, budući da je nerijetko u klimatskoj povijesti Zemlje bilo i većih i brzih porasta temperature i koncentracije ugljičnog dioksida koji nisu bili inducirani čovjekovim djelovanjem nego tadašnjim trenutnim skupom fizičkih parametara koji su atmosferski sustav doveli u takvo stanje. Stoga ne postoji znanstveni konsenzus oko tzv. stakleničkog učinka niti o smjeru uzročno-posljedične veze u njegovom temelju [23].

Konačno, u radu su postavljena i ostavljena mnogobrojna otvorena pi-

tanja, poput pitanja prihvaćanja Arrheniusove ili adijabatske teorije, pitanja pristupa računalnoj raščlambi klimatskih podataka (zagladiti ili ne?), te konačno pitanja podrijetla pojedinih vrhova u klimatskom spektru, pogotovo onih manjih. Stoga tablica 3.1 odnosno slika 3.5, kao i drugi upravo navedeni rezultati ovoga rada predstavljaju istodobno i novi “izlazni skup” (eng. *output*) u smislu da su jednim dijelom novi rezultati i “ulazni skup” (eng. *input*) u smislu da su otvorena neka nova znanstvena pitanja za daljnje istraživanje u ovom području znanosti.

A. DODATAK

Jedinice

A.1 Vrijeme

Standardna jedinica koju ćemo koristiti za vrijeme je tisućljeće, s oznakom ky (eng. *kiloyear*) ili nekad kyr:

$$t [\text{ky}] = 3,169 \cdot 10^{-11} \cdot t [\text{s}]. \quad (\text{A.1})$$

Rijetko će se koristiti i godina, s oznakom y (eng. *year*). Također, vrijeme se broji od sadašnjosti unatrag, tj. vrijednost npr. $t = 50$ ky znači “prije 50 000 godina”.

A.2 Koncentracija

U fizici se koncentracija obično izražava kao broj čestica po jediničnom volumenu, dakle u jedinici m^{-3} , ili kao gustoća, odnosno u jedinici kg/m^3 . U znanosti o okolišu uobičajena jedinica za koncentraciju je ppmv (eng. *part per million by volume*), koja je definirana kao jedna molekula od milijun molekula: 200 ppmv CO_2 znači da u određenom obujmu ima 200 molekula CO_2 na 1000 000 molekula ukupno u volumenu. Iz ove definicije očito je pretvorba iz jedinica gustoće:

$$[\text{ppmv}] = \frac{N_x}{10^6 N} = \frac{\frac{m_x}{u \cdot M_r(x)}}{10^6 \frac{p_0 V}{RT}} = \frac{R}{10^6 u p_0} \frac{T}{M_r(x)} \left[\frac{m_x}{V} \right]$$

$$= \frac{8,205 \cdot 10^{-8} \cdot T}{M_r(x)} [\text{kg/m}^3]. \quad (\text{A.2})$$

Ovdje je m_x masa sastojka x , u je atomska jedinica mase, $M_r(x)$ je relativna molekulska masa, p_0 je atmosferski tlak, V ukupni volumen, R opća plinska stalnica i T temperatura u kelvinima. Budući da je

$$\rho_x = \frac{m_x}{V} = \frac{N_x \cdot u M_r(x)}{V} = c_x u M_r(x), \quad (\text{A.3})$$

pretvora iz jedinica koncentracije je onda

$$[\text{ppmv}] = \frac{R}{10^6 p_0} T \cdot [c_x] = 1,363 \cdot 10^{-34} T \cdot [\text{m}^{-3}]. \quad (\text{A.4})$$

U ovom se radu koncentracije izražavaju u ppmv.

B. DODATAK

Interpolacije

Glavni je problem interpolacije kako određenom skupu podataka dodati više podataka tako da budu u skladu s izvornim podatcima. Jedna od glavnih i tipičnih potreba za interpolacijom je upravo ova zbog koje su i u sklopu ovog rada potrebne interpolacije, a to je dodavanje novih podataka izvornom neravnomjernom skupu kako bi postao ravnomjeran. Tri su najučestalije vrste interpolacije: *linearna*, *krivuljna* (eng. *spline*) i *Hermiteova*, od jednostavnije prema složenijoj.

B.1 Linearna interpolacija

Linearna interpolacija koristi najjednostavniju metodu dodavanja novih točaka, a to je da nove točke dodaje tako da leže na pravcu koji spaja izvorne točke, i to između svakoga para izvornih podataka. Prema tome, nove točke moraju zadovoljavati jednadžbu pravca kroz dvije točke. Ako imamo izvorni skup točaka u uređenim parovima (x_i, y_i) za $i \in \{0, 1, \dots, N\}$, ta jednadžba između svake dvije točke x_i i x_{i+1} glasi:

$$y = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + y_i = \alpha(x)y_i + \beta(x)y_{i+1}, \quad (\text{B.1})$$

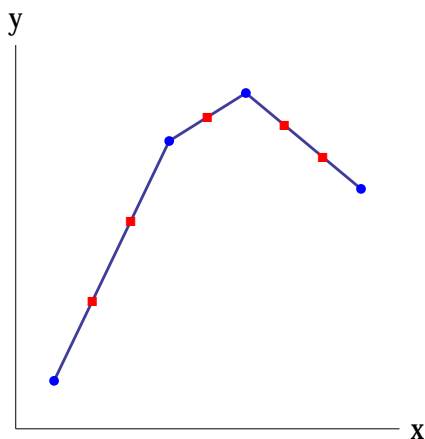
gdje su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ očito

$$\alpha(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}; \quad \beta(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (\text{B.2})$$

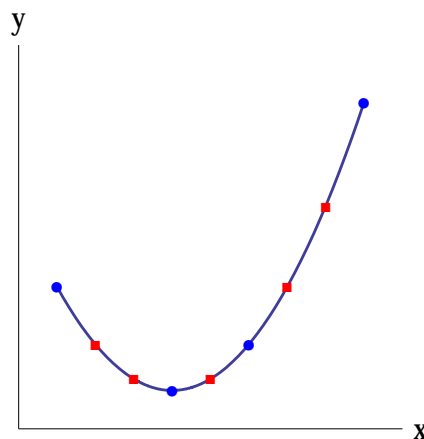
Ovako interpolirana krivulja je kontinuirana ali “izlomljena” odnosno prva derivacija joj je u izvornim točkama diskontinuirana ili beskonačna. Shema linearne interpolacije je prikazana na sl. B.1(a).

B.2 Krivuljna interpolacija

Linearna interpolacija, upravo jer je linearna, u svakom intervalu između dvije točke koje interpolira ima drugu derivaciju 0, a na rubovima ili nedefiniranu ili beskonačnu. Krivuljna interpolacija (eng. *spline interpolation*) želi poboljšati takvu interpolaciju tako da u svakom intervalu i na njegovim rubovima imamo kontinuiranu drugu derivaciju, a glatku prvu. Shema krivuljne interpolacije prikazana je na sl. B.1(b).



(a) Shema linearne interpolacije.



(b) Shema krivuljne interpolacije.

Slika B.1: Shematski primjer dodavanja točaka interpolacijom. Izvorne točke označene su plavim kružićima, dobivena interpolacijska krivulja crtom, a dodane točke crvenim kvadratićima.

Ukoliko znamo druge derivacije podataka, y''_i , to možemo napraviti tako da našoj linearnoj interpolaciji, prethodno izvedenoj, dodamo polinom stupnja višeg od dva (jer druga derivacija treba biti $\neq 0$), i redovito se uzima polinom trećeg stupnja (tada specijalno imamo *kubnu* krivuljnu interpolaciju):

$$z = \gamma(x, x^2, x^3)y''_i + \delta(x, x^2, x^3)y''_{i+1}, \quad (\text{B.3})$$

tako da je $y = \alpha y_i + \beta y_{i+1} + z$. Koeficijente α i β znamo iz linearne interpolacije, a koeficijenti γ i δ moraju zadovoljavati uvjete (i) da druga derivacija bude pravac (jer je polinom trećeg stupnja) koji će u x_i dati y_i'' odnosno u x_{i+1} dati y_{i+1}'' te (ii) da je $z(x_i) = 0$ i $z(x_{i+1}) = 0$ (kako bi dobili y_i i y_{i+1}). Prvi uvjet daje jednadžbu pravca kroz dvije točke, odnosno imamo relaciju potpuno analognu onoj u linearnoj interpolaciji, samo za y'' , pa odmah znamo da su druge derivacije koeficijenata:

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}; \quad \frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (\text{B.4})$$

Oдавde je γ

$$\gamma(x) = -\frac{1}{6} \frac{x^3}{x_{i+1} - x_i} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{x_{i+1} - x_i} + Cx + D, \quad (\text{B.5})$$

a stalnice C i D određujemo iz drugog uvjeta: jedini način da z bude nula u krajnjim točkama je da koeficijenti budu nula u njima; uvrštavanjem $\gamma(x_i) = 0$ i $\gamma(x_{i+1}) = 0$ dobivamo sustav od dvije jednadžbe za C i D . Rješenje je sustava, uz nešto manipulacije,

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{6} \frac{x_i^2 - 2x_{i+1}^2 - 2x_i x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}; \\ D &= \frac{1}{6} \frac{2x_i x_{i+1}^2 - x_i^2 x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u γ dobivamo

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{6} \frac{1}{x_{i+1} - x_i} (-x^3 + 3x^2 x_{i+1} - 2x x_{i+1}^2 - 2x x_i x_{i+1} + 2x_i x_{i+1}^2 + \\ &\quad + x x_i^2 - x_i^2 x_{i+1}) \\ &= \frac{1}{6} \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \cdot \frac{x_i + 1 - x - x_{i+1} + x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \frac{x_i + 1 - x + x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \\ &\quad \cdot (x_{i+1} - x_i)^2 \\ &= \frac{\alpha}{6} (\alpha - 1)(\alpha + 1)(x_{i+1} - x_i)^2 \\ &= \frac{\alpha^3 - \alpha}{6} (x_{i+1} - x_i)^2. \end{aligned}$$

Sad, uočimo da smo $\beta(x)$ dobili tako što smo u α zamijenili: $\beta(x) = \alpha(x \rightarrow -x, x_{i+1} \leftrightarrow -x_i)$. Potpuno analognu ovdje možemo dobiti δ zamjenom u γ :

$$\delta(x) = \gamma(x \rightarrow -x, x_{i+1} \leftrightarrow -x_i) = \frac{\beta^3 - \beta}{6} (x_{i+1} - x_i)^2. \quad (\text{B.6})$$

Ostala je još kao nepoznanica druga derivacija y''_i . Nju nalazimo koristeći uvjet da interpolacija uopće valja, a to je da se u svakoj točki interpolirana krivulja glatko nastavlja, odnosno da derivacija s jedne strane i s druge strane točke bude jednaka. Derivacija y po x je elementarna:

$$y' = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{1 - 3\alpha^2}{6} y''_i + \frac{3\beta^2 - 1}{6} y''_{i+1} \right), \quad (\text{B.7})$$

pa uvrštavanjem $x = x_i$ iz intervala $[x_{i-1}, x_i]$, te ponovo $x = x_i$ iz intervala $[x_i, x_{i+1}]$ u prethodno i izjednačavanjem i sređivanjem dobivamo jednadžbu za sve y''_i iz poznavanja y_i :

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1})y''_{i-1} + \frac{1}{3}(x_{i+1} - x_{i-1})y''_i + \frac{1}{6}(x_{i+1} - x_i)y''_{i+1}. \quad (\text{B.8})$$

Međutim, ovdje je i išao od 2 do $N - 1$, tj. imamo $N - 2$ jednadžbi za N nepoznanica. Još dvije jednadžbe dobivamo zadavanjem rubnih uvjeta na krajevima: redovito se kao rubni uvjet stavi pretpostavka da na rubu krivulju možemo približiti pravcem, tj. $y''_1 = y''_N = 0$.

Uočimo također da je jednadžba za druge derivacije zapravo tridijagonalna (u matričnom smislu), za što postoje jako dobri algoritmi i to dosta brži nego u općem slučaju matrične jednadžbe (dovoljno je N operacija) [54].

B.3 Hermiteova krivuljna interpolacija

Nekad podatci reproduciraju toliko složenu ovisnost da obična krivuljna interpolacija nije dovoljno dobra. Tada se najčešće koristi njezin poseban slučaj, u kojem se za kubne interpolacijske polinome koriste Hermiteovi polinomi trećeg reda. Ova se interpolacija zove *Hermiteova krivuljna interpolacija*, ili češće samo *kubna interpolacija*¹ jer u načelu opet koristi kubni polinom, samo specijalno Hermiteov. Osim vrijednosti točaka, ova interpolacija u svakoj točki koristi i tangentu u toj točki, točnije koeficijent nagiba

¹Postoji zabuna u interpolacijskom nazivlju. Premda je i krivuljna interpolacija zapravo najčešće kubna interpolacija, često se pod nazivom “kubna interpolacija” misli na Hermiteovu krivuljnu interpolaciju.

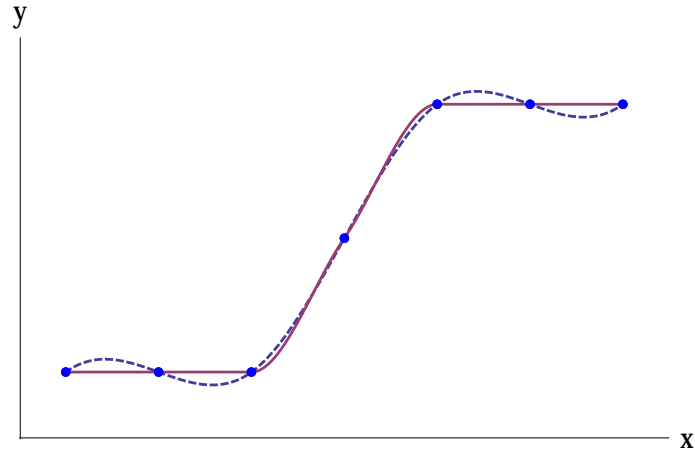
tangente, koji se najčešće računa kroz tri točke:

$$t_i = \frac{1}{2} \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{1}{2} \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}. \quad (\text{B.9})$$

Uvjet da u svakom x_i funkcija bude jednaka y_i i derivacija t_i daje jedinu moguću krivulju trećeg stupnja koja spaja svake dvije točke:

$$\begin{aligned} y &= (2\beta^3 - 3\beta^2 + 1)y_i + (3\beta^2 - 2\beta^3)y_{i+1} + (\beta^3 - 2\beta^2 + \beta)t_i + (\beta^3 - \beta^2)t_{i+1} \\ &= H_0^{(3)}(\beta)y_i + H_3^{(3)}(\beta)y_{i+1} + H_1^{(3)}(\beta)t_i + H_2^{(3)}(\beta)t_{i+1} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

gdje su $H_j^{(i)}(x)$ tzv. *Hermiteovi temeljni polinomi* (različiti od *Hermiteovih polinoma*). Ovakva interpolacija, budući da koristi svojstva “zakrivljenosti



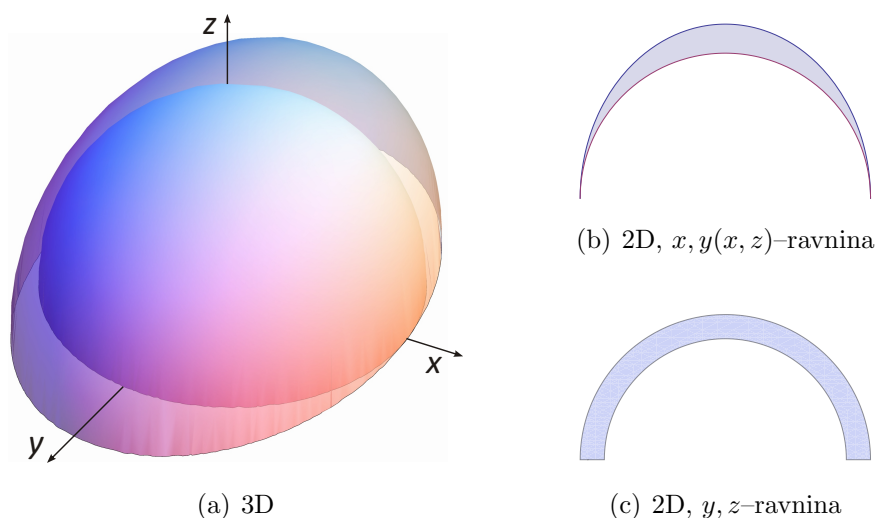
Slika B.2: Shematski prikaz usporedbe krivuljne (isprekidana plava crta) i Hermiteove krivuljne (puna ljubičasta crta) interpolacije. Podatci su nacrtani plavim točkama.

podataka” koja su ugrađena u njima, bolje definira zakrivljenost dobivene funkcije, pa je zato primjerenija za složene funkcijske oblike, pogotovo za skupove podataka koji sadrže neku vrstu nekontinuiranosti. Tipičan je takav primjer na sl. B.2, dok za “glatke” podatke ne bismo vidjeli toliku razliku. Ukratko, možemo reći da je krivuljna interpolacija općenito glađa od Hermiteove [29]. Primijetimo još jednu prednost posljednje: ne mora se rješavati matrični sustav jednačbi, pa je algebarski jednostavnija.

C. DODATAK

Središte mase Zemljina ispupčenja

Ovdje donosimo izračun položaja središta mase Zemljina ispupčenja, koristeći u odjeljku 4.7.1 na str. 79. Shema je dana na sl. C.1. Pretpostavljamo da mu je gustoća homogena.



Slika C.1: Shema elipsoidnog ispupčenja u prostoru (a) te u dva poprečna presjeka (b) i (c). Ljestvica nije prirodna, nego takva da naglasi ispupčenje.

Položaj središta mase samog elipsoidnog ispupčenja, u geometriji danoj na slici C.1(a), naći ćemo kao srednji položaj dvaju tijela: poluelipsoida u poluprostoru $z > 0$ i šuplje polukugle negativne mase unutar njega. Kako su oba tijela centralnosimetrična (što ne znači rotacijski!) s obzirom na os z , to će položaj središta mase biti na toj osi. Neka je polumjer polukugle R , a

duljine poluosi neka su a , b i c redom za x , y i z -os.

Položaj je središta mase polukugle (označimo je s \mathcal{K} ; radimo u sfernom koordinatnom sustavu):

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{sm}}^{\mathcal{K}} &= \frac{1}{V_{\mathcal{K}}} \int_{\mathcal{K}} z dV \\
 &= \frac{1}{V_{\mathcal{K}}} \int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r \cos \vartheta r^2 \sin \vartheta \\
 &= \frac{1}{\frac{2}{3}R^3\pi} \frac{R^4\pi}{4} \\
 &= \frac{3}{8}R.
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Položaj središta mase elipsoida (označimo ga s \mathcal{E}) je analogno

$$Z_{\text{sm}}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{V_{\mathcal{E}}} \int_{\mathcal{E}} z dV. \tag{C.2}$$

Najlakše ćemo ga naći ako napravimo transformaciju koordinatnog sustava takvu da u novom sustavu elipsoid postane kugla. Budući da je jednadžba elipsoida

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, \tag{C.3}$$

ta je transformacija očigledno

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \chi = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{c}, \tag{C.4}$$

jer je u ovim koordinatama jednadžba elipsoida $\xi^2 + \chi^2 + \zeta^2 = 1$ tj. jednadžba kugle. Jakobijan je ove transformacije

$$\mathcal{J} = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \chi, \zeta)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \chi} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \chi} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \chi} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \right| = abc, \tag{C.5}$$

pa je volumni element u novom sustavu

$$dV = |\mathcal{J}| d\xi d\chi d\zeta = abc d\xi d\chi d\zeta. \tag{C.6}$$

Prelaskom u sferne koordinate (r, ϑ, φ) novog sustava (ξ, χ, ζ) , čiji nam je jakobijan dobro poznat ($d\xi d\chi d\zeta = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$), izraz (C.3) postaje¹:

$$\begin{aligned} Z_{\text{sm}}^{\mathcal{E}} &= \frac{abc}{V_{\mathcal{E}}} \int_{\mathcal{E}} c \zeta d\xi d\chi d\zeta \\ &= \frac{abc^2}{V_{\mathcal{E}}} \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r \cos \vartheta r^2 \sin \vartheta \\ &= \frac{abc^2}{\frac{2}{3}abc\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{3}{8}c. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Ovo je i očekivano, jer znamo da se za $a = b = c = R$ treba svoditi na slučaj za kuglu odnosno na (C.1).

Sad je položaj središta mase našeg ispupčenja dan kao težinska srednja vrijednost ovih dvaju tijela, polukugle (C.1) i poluelipsoida (C.7):

$$Z_{\text{sm}} = \frac{Z_{\text{sm}}^{\mathcal{E}} V_{\mathcal{E}} - Z_{\text{sm}}^{\mathcal{K}} V_{\mathcal{K}}}{V_{\mathcal{E}} - V_{\mathcal{K}}} = \frac{3 abc^2 - R^4}{8 abc - R^3}. \quad (\text{C.8})$$

Ukoliko konačno općem rezultatu (C.8) pridružimo parametre našeg konkretnog problema u kojem ovo koristimo, tj. vrijednosti iz tablice 1.2:

$$\begin{aligned} a &= R_p, & c &= R_e, \\ b &= R_e, & R &= R_p, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

dobivamo

$$\begin{aligned} R_{\text{sm}} &= \frac{3 R_e^3 R_p - R_p^4}{8 R_e^2 R_p - R_p^3} \\ &= \frac{3 R_e^2 + R_e R_p + R_p^2}{8 R_e + R_p} \\ &= \frac{3}{8} \left(R_e + R_p - \frac{R_e R_p}{R_e + R_p} \right) \\ &\approx \frac{9}{16} R_{\oplus}, \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

gdje smo uvrstili srednji polumjer Zemlje $R_{\oplus} \approx \frac{R_e + R_p}{2}$ i uočili da je $R_e R_p \approx R_{\oplus}^2$.

¹Iz definicija sfernih koordinata ($\xi = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $\chi = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $\zeta = r \cos \vartheta$) očito je da cijeli elipsoid ($\xi, \chi, \zeta \in [-1, 1]$) obuhvaćamo za $r \in [0, 1]$, $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Literatura

- [1] Aeschbach-Hertig, W. *Rebuttal of "On global forces of nature driving the Earth's climate. Are humans involved?" by L. F. Khilyuk and G. V. Chilingar.* // Environmental Geology. 52, 5(2006), str. 1007-1009.
- [2] Aksofu, S.-I. *Two Natural Components of the Recent Climate Change: (1) The Recovery from the Little Ice Age (A Possible Cause of Global Warming) and (2) The Multi-decadal Oscillation (The Recent Halting of the Warming).* 30. 4. 2009. http://people.iarc.uaf.edu/~sakasofu/pdf/two_natural_components_recent_climate_change.pdf (7. 3. 2011.).
- [3] Archer, D. *The Long Thaw.* Princeton : Princeton University Press, 2009.
- [4] Archer, D. *The Global Carbon Cycle.* Princeton : Princeton University Press, 2010.
- [5] Arrhenius, S. *On the Influence of Carbonic Acid in the Air upon the Temperature of the Ground.* // Philosophical Magazine and Journal of Science. 5, 41(1896), str. 237-276.
- [6] Arrhenius, S. *Lehrbuch der Kosmischen Physik.* Leipzig: S. Hirzel, 1903.
- [7] Becker, J. *Late Pliocene millennial to Milankovitch-scale climate variability: A case study of Marine Isotope Stages 101–95 in the Mediterranean and adjacent North Atlantic* (doktorska disertacija). Utrecht: Utrecht University, 2005.

-
- [8] Berger, A. *Obliquity and Precession for the Last 5 000 000 Years.* // Astronomy & Astrophysics. 51(1976), str. 127-135.
- [9] Berger, A. *Long-term variations of daily insolation and Quaternary climatic changes.* // Journal of the Atmospheric Sciences. 35(1978), str. 2362-2367.
- [10] Berger, A.; Loutre, M. F.; Mélice, J. L. *Milankovitch and beyond.* // Milutin Milankovitch Anniversary Symposium: "Paleoclimate and the Earth Climate System" / ur. A. Berger, M. Ercegovac, F. Mesinger. Beograd: Srpska akademija nauka i umetnosti, 2004. Str. 61-71.
- [11] Berger, A.; Loutre, M. F.; Mélice, J. L. *Equatorial insolation: from precession harmonics to eccentricity frequencies.* // Climate of the Past. 2, 2(2006), str. 131-136.
- [12] Bronštejn, I. N. et al. *Matematički priručnik.* Zagreb: Golden marketing – Tehnička knjiga, 2004.
- [13] Chilingar, G. V.; Sorokhtin, O. G.; Khilyuk, L. F.; *Response to W. Aeschbach–Hertig rebuttal of "On global forces of nature driving the Earth's climate. Are humans involved?" by I. F. Khilyuk and G. V. Chilingar.* // Environmental Geology. 54, 7(2007), str. 899-910.
- [14] Chilingar, G. V.; Khilyuk, L. F.; Sorokhtin, O. G. *Cooling of atmosphere due to CO₂ emission.* // Energy Sources, Part A. 30(2008), str. 1-9.
- [15] Chilingar, G. V.; Sorokhtin, O. G.; Khilyuk, L. F.; Gorfunkel, M. V. *Greenhouse gases and greenhouse effect.* // Environmental Geology. 58, 6(2008), str. 1207-1213.
- [16] Clemens, S. C.; Tiedemann, R. *Eccentricity forcing of Pliocene—Early Pleistocene climate revealed in a marine oxygen-isotope record.* // Nature. 385(1997), str. 801-804.

-
- [17] Cox, A. N. (ur.) *Allen's Astrophysical Quantities*. New York: Springer Verlag, 2000.
- [18] Darwent, B. deB. *Bond Dissociation Energies in Simple Molecules*. Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1970.
- [19] Ehrlich, R. *Solar resonant diffusion waves as a driver of terrestrial climate change*. // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 69, 7(2007), str. 759–766.
- [20] Farley, K. A. *Cenozoic variations in the flux of interplanetary dust recorded by ^3He in a deep-sea sediment*. // Nature. 376(1995), str. 153–156.
- [21] FFT Discrete Fourier Transform. <http://www.mathworks.com/help/techdoc/ref/fft.html>. (21. 3. 2011.)
- [22] Fischer, H. et al. *Ice Core Records of Atmospheric CO_2 Around the Last Three Glacial Terminations*. // Science. 283, 5408(1999), str. 1712–1714.
- [23] Gerhard, L. C. *Climate change: conflict of observational science, theory and politics*. // AAPG Bulletin. 90, 3(2006), str. 409–412.
- [24] Ghil, M. *Cryothermodynamics: the chaotic dynamics of paleoclimate*. // Physica D. 77, 1–3(1994), str. 130–159.
- [25] Compressed Gas Association. *Handbook of Compressed Gases*. Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [26] Imbrie, J.; Imbrie, J. Z. *Modeling the Climatic Response to Orbital Variations*. // Science. 207, 4434(1980), str. 943–953.
- [27] Jones, P. D.; Mann, M. E. *Climate over past millennia*. // Reviews of Geophysics. 42, 2(2004), str. 1–42.

-
- [28] Jouzel, J. et al. *Orbital and millennial Antarctic climate variability over the past 800,000 years.* // Science. 317, 5839(2007), str. 793-796.
- [29] Kahaner, D.; Moler, C.; Nash, S. *Numerical Methods and Software.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1988.
- [30] Kawamura, K. et al. *Northern Hemisphere forcing of climatic cycles in Antarctica over the past 360,000 years.* // Nature. 448(2007), str. 912-916.
- [31] Khilyuk, L. F.; Chilingar, G. V. *Global Warming: Are We Confusing Cause and Effect?.* // Energy Sources, Part A. 25(2003), str. 357-370.
- [32] Khilyuk, L. F.; Chilingar, G. V. *On global forces of nature driving the Earth's climate. Are humans involved?.* // Environmental Geology. 50, 6(2006), str. 899-910.
- [33] Kortenkamp, S. J.; Dermott, S. F. *A 100,000-Year Periodicity in the Accretion Rate of Interplanetary Dust.* // Science. 280, 5365(1998), str. 874-876.
- [34] Landau, L. D.; Lifšic, E. M. *Mehanika.* Beograd: Građevinska knjiga, 1961.
- [35] Lopac, V. *Leksikon fizike.* Zagreb: Školska Knjiga, 2009.
- [36] Lourens, L. J. et al. *Linear and non-linear response of late Neogene glacial cycles to obliquity forcing and implications for the Milankovitch theory.* // Quaternary Science Reviews. 29(2010), str. 352-365.
- [37] Loutre, M. F.; Berger, A. *No glacial-interglacial cycle in the ice volume simulated under a constant astronomical forcing and a variable CO₂.* // Geophysical Research Letters. 27, 6(2000), str. 783-786.
- [38] Knežević, Z. *Milutin Milanković and the astronomical theory of climate changes.* // Europhysics News. 41, 3(2010), str. 17-20.

-
- [39] Mathematica® inačica 6.0. Champaign, Illinois: Wolfram Research™ Inc., 2007.
- [40] MATLAB® inačica V7.7(R2008b). Natick, Massachusetts: The MathWorks™ Inc., 2008.
- [41] Microsoft® Visual Studio® 2008. Redmond, Washington: Microsoft Corporation, 2008.
- [42] Миланковић, М. *Астрономска теорија секуларних варијација климе*. Београд: САНУ, 1930.
- [43] Миланковић, М. *Небеска механика*. Београд: Задужбена Лука Теловића–Требињца, 1935.
- [44] Миланковић, М. *Нови резултати Астрономске теорије климатских промена*. // Глас Српске Краљевске Академије. CLXXV, 86(1937), str. 1-41.
- [45] Milankovitch, M. *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem*. Beograd: Königlich Serbische Akademie, 1941.
- [46] Миланковић, М. *Астрономска теорија климатских промена и њена примена у геофизици*. Београд: Научна књига, 1948.
- [47] Milankovitch, M. *Astronomische Theorie der Klimaschwankungen — Ihr Werdegang und Wiederhall*. Beograd: Serbische Akademie der Wissenschaften, 1957.
- [48] Muller, R. A. *Extraterrestrial Accretion and Glacial Cycles*. // New Developments Regarding the KT Event and Other Catastrophes in Earth History / Houston: Lunar and Planetary Institute of Houston, 1994. Str. 85-86.
- [49] Muller, R. A.; MacDonald, G. J. *Glacial Cycles and orbital inclination*. // Nature. 377(1995), str. 107 - 108.

- [50] Muller, R. A.; MacDonald, G. J. *Glacial Cycles and Astronomical Forcing*. // Science. 277, 5323(1997), str. 215-218.
- [51] North, G. R.; Shen, S. S.; Basist, A. S. *Global warming*. // Encyclopedia of Environmetrics. New York : Wiley, 2002. Str. 928-933.
- [52] Ohmoto, H.; Watanabe, Y.; Kumazawa, K. *Evidence from massive siderite beds for a CO₂-rich atmosphere before ~1.8 billion years ago*. // Nature. 429(2004), str. 395-399.
- [53] Petit, J. R. et al. *Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antarctica*. // Nature. 399(1999), str. 429-436.
- [54] Press, W. H. et al. *Numerical Recipes in C — The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [55] Ruddiman, W. F. *Orbital changes and climate*. // Quaternary Science Reviews. 25, 23-24(2006), str. 3092–3112.
- [56] Ruth, U. et al. *“EDML1”: a chronology for the EPICA deep ice core from Dronning Maud Land, Antarctica, over the last 150 000 years*. // Climate of the Past. 3, 3(2007), str. 475-484.
- [57] Saltzman, B. et al. *The late Quaternary glaciations as the response of a three-component feedback system to Earth-orbital forcing*. // Journal of Atmospheric Sciences. 41, 23(1984), str. 3380–3389.
- [58] Shackleton, N. J. *The 100,000-Year Ice-Age Cycle Identified and Found to Lag Temperature, Carbon Dioxide, and Orbital Eccentricity*. // Science 289, 5486 (2000), str. 1897–1902.
- [59] Сорохтин, О. Г. *Парниковый эффект: Миф и реальность*. // Вестник Российской Академии Естественных Наук. 1, 1(2001), str. 8-21.

- [60] Сорохтин, О. Г. *Эволюция климата Земли и происхождение ледниковых эпох.* // Вестник Российской Академии Наук. 76, 8(2006), стр. 699-706.
- [61] Sorokhtin, O. G. *The Evolution of the Earth's Climate and the Genesis of Glacial Epochs.* // Herald of the Russian Academy of Sciences. 76, 4(2006), str. 332-338.
- [62] Sorokhtin, O. G.; Chilingar, G. V; Khilyuk, L. F. *Global Warming and Global Cooling — Evolution of Climate on Earth.* Oxford: Elsevier, 2007.
- [63] Sorokhtin, O. G.; Chilingarian, G. V; Sorokhtin, N. O. *Evolution of Earth and its Climate — Birth, Life and Death of Earth.* Oxford: Elsevier, 2011.
- [64] Stearns, S. D.; David, R. A. *Signal processing algorithms in MATLAB.* Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [65] Tuenter, E. et al. *Simulating sub-Milankovitch climate variations associated with vegetation dynamics.* // Climate of the Past Discussions. 2(2006), str. 745–769.
- [66] Tzedakis, P. C. et al. *Interglacial diversity.* // Nature Geoscience. 2(2009), str. 751-755.
- [67] Turns, S. R.; Kraige, D. R. *Property tables for thermal fluids engineering.* New York: Cambridge University Press, 2007.
- [68] Williams, J. G. *Contributions to the Earth's obliquity rate, precession, and nutation.* // The Astronomical Journal. 108, 2(1994), str. 711-724.
- [69] Zachos, J. et al. *Trends, Rhythms, and Aberrations in Global Climate 65 Ma to Present.* // Science. 292, 5517(2001), str. 686-693.

